"Caracteres del álgebra exterior de las representaciones irreducibles de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ y la homología de extensiones abelianas de la subálgebra de Borel de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$"

10 de agosto de 2015

Índice general

Capítulo 1

Introducción

La (co)homología de álgebras de Lie tiene diversas aplicaciones a la geometría, a la teoría de representaciones de grupos y a la teoría de grupos en general, entre otras. Resultados notables en esta dirección son los clásicos trabajos de Nomizu [N] y Bott [B], en los que se reduce el problema de calcular ciertos invariantes geométricos o topológicos al problema algebraico de calcular la cohomología de ciertas álgebras de Lie asociadas al espacio geométrico o topológico en cuestión. En esta tesis se calcula la dimensión de la homología de una familia de álgebras de Lie solubles en términos del carácter del álgebra exterior de las representaciones irreducibles de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$.

Sea $\mathfrak{b}$ la subálgebra de Borel de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, es decir el álgebra de Lie con base $\{H, E\}$ y con corchete $[H,E] = 2E$. Para cada n, sea V_n la representación irreducible de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ de peso máximo n. Haciendo actuar $\mathfrak{b}$ en V_n se define el álgebra de Lie

$$\mathfrak{b}_n = \mathfrak{b} \ltimes V_n.$$

Es claro que $\mathfrak{b}_n$ es un álgebra de Lie de dimensión $n+3$, si $n = 0$ es 2-pasos soluble y si $n \neq 0$ es 3- pasos solubles. Si $n \neq 0$, el radical nilpotente de $\mathfrak{b}_n$ es isomorfo al álgebra de Lie Filiforme estandar de dimensión $n+2$. En este trabajo se expresa, para todo n, la dimensión de la homología de $\mathfrak{b}_n$ con coeficientes triviales $H_*(\mathfrak{b}_n)$ en términos del carácter del álgebra exterior de las representaciones irreducibles de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$.

Por resultados conocidos de homología de álgebras de Lie, el problema de calcular $H_*(\mathfrak{b}_n)$ se reduce a calcular $H_*(\mathfrak{b}, \bigwedge^j V_n)$ para todo $j = 0, \ldots, n+1$. En este trabajo, a su vez, se muestra que este problema se reduce a calcular el espacio de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$-invariantes en $\bigwedge^j V_n$, que denotamos por $(\bigwedge^j V_n)^{\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})}$.

Para calcular la dimensión del espacio $(\bigwedge^j V_n)^{\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})}$ se expresa el carácter de $\bigwedge^j V_n$ en términos de los q-coeficientes binomiales gaussianos y se calcula la multiplicidad de la representación trivial en $\bigwedge^j V_n$ a partir de ellos. Con esta información se obtiene una expresión para la dimensión de $H_k(\mathfrak{b}_n)$ para todo k y todo n.

Más precisamente, se demuestra que

$$\dim H_k(\mathfrak{b}_n) = \alpha_0\Big(\bigwedge^k V_n\Big) + \alpha_0\Big(\bigwedge^{k-1} V_n\Big), \qquad 0 \leq k \leq n+3;$$

(entendemos que $\bigwedge^j V_n = 0$ si $j > n+1$ o $j < 0$) donde $\alpha_0(V) = \dim\big(V^{\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})}\big)$. Teniendo en cuenta que el carácter de $\bigwedge^k V_n$ está dado por el polinomio

$$ch_{\bigwedge^k V_n}(q) = q^{k^2-(n+1)k} \binom{n+1}{k}_{q^2}$$

se obtiene que

$$\dim H_k(\mathfrak{b}_n) = c_0^{(k)} + c_0^{(k-1)} - c_2^{(k)} - c_2^{(k-1)}.$$

donde $c_r^{(k)}$ es el coeficiente de q^r en $ch_{\bigwedge^k V_n}(q)$.

Utilizando este resultado fue posible obtener también :

- $\dim H_k(\mathfrak{b}_n) = \dim H_{n+2-k}(\mathfrak{b}_n)$ para $0 \leq k \leq n+2$.
- $\dim H_2(\mathfrak{b}_n) = 0$ para todo n par.
- $\dim H_2(\mathfrak{b}_n) = 1$ para todo n impar.
- $\dim H_3(\mathfrak{b}_n) = 0$ para todo n múltiplo de 4.
- $\dim H_3(\mathfrak{b}_n) = 1$ para todo n que no es múltiplo de 4.

Al final se incluye un breve análisis sobre el comportamiento asintótico de la dimensión de la homología.

En un futuro inmediato estamos interesados en calcular $H_*(b_n, \lambda)$ donde $\lambda : b_n \to \mathbb{C}$ es un carácter de b_n. Este trabajo que ya se encuentra avanzado en una tesis de grado de un estudiante bajo mi dirección. Este problema es un paso hacia el objetivo de encontrar una relación general entre la homología de un álgebra de Lie soluble de dimensión finita y su sombra nilpotente, que es una extensión del radical nilpotente. Esto último es uno de los principales objetivos de un proyecto de investigación financiado por el CIUNSa del cual soy codirectora.

Esta tesis está realizada dentro del marco de la Maestría de Matemática Aplicada dictada por la Universidad Nacional de Salta de la Facultad de Ciencias Exactas.

Capítulo 2

Introducción a las Álgebras de Lie

En este capítulo haremos un resumen de los principales conceptos relacionados con la teoría de algebras de Lie. En general, buscaremos dar ejemplos básicos de los conceptos introducidos y saltearemos las demostraciones que pueden ser encontradas en cualquier libro estándard sobre el tema, por ejemplo James E Humphreys, [3], San Martin, [6].

Siempre $\mathbb{F}$ denotará un cuerpo de característica 0, y algebraicamente cerrado excepto que se especifique otra cosa.

2.1. Definición y Ejemplos

Definición 2.1.1. Un álgebra de Lie es un espacio vectorial $\mathfrak{g}$ sobre $\mathbb{F}$ junto con un producto denominado corchete o conmutador

$$[,]:\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$$

con las siguientes propiedades:

(a) es bilineal para todo $x, y, z \in \mathfrak{g}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$

$$\begin{aligned}[][\alpha x+\beta y, z] &= \alpha[x,z]+\beta[y,z]\\ [x,\alpha y+\beta z] &= \alpha[x,y]+\beta[x,z]\end{aligned}$$

(b) antisimétrico, $[x,x]=0$ para todo $x\in\mathfrak{g}$

(c) satisface la identidad de Jacobi para todo $x, y, z \in \mathfrak{g}$

$$[x,[y,z]]+[z,[x,y]]+[y,[z,x]]=0$$

Esta igualdad puede ser reescrita de las siguientes maneras

(a) $[x,[y,z]]=[[x,y],z]+[y,[x,z]]$.
(b) $[[x,y],z]=[[x,z],y]+[x,[y,z]]$.

En general un álgebra es un espacio vectorial con un producto esto es una aplicación de $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$ en $\mathfrak{g}$. Cualquier aplicación de este tipo que merezca este nombre debe ser bilineal. La antisimetría y la identidad de Jacobi son características de las álgebras de Lie.

Existe por ejemplos álgebras asociativas, las cuales tienen la propiedad adicional $x(yz) = (xy)z$. Convine observar que el corchete de Lie en general no es asociativo porque siempre $[[x,x],y]=0$ y sin embargo $[x,[x,y]]$ no siempre se anula.

Definición 2.1.2. Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie. Una subálgebra de $\mathfrak{g}$ es un subespacio vectorial $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ que es cerrada para el corchete es decir

$$\forall x, y \in \mathfrak{h} \qquad\qquad [x, y] \in \mathfrak{h}$$

Example 2.1.3. $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{F})$ el espacio de todas las transformaciones lineales de un espacio vectorial de dimensión n en si mismo, el cual es isomorfo a todas las matrices $n \times n$ con coeficientes en $\mathbb{F}$, el corchete está dado por

$$[x, y] = xy - yx \quad x, y \text{ matrices}$$

Sea e_{ij} la matriz $n \times n$ cuya entrada (i, j) vale 1 y 0 en los otros casos. El siguiente conjunto es una base para $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{F})$

$$\{e_{ij} : i, j = 1, \cdots, n\}$$

La siguiente fórmula es muy útil para calcular el corchete de Lie entre matrices.

$$[e_{ij}, e_{kl}] = \delta_{jk} e_{il} - \delta_{li} e_{kj} \tag{2.1.1}$$

donde $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$, y $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$.

El álgebra de transformaciones lineales de un espacio vectorial V se denotará $\mathfrak{gl}(V)$.

Example 2.1.4. Álgebras de Lie provenientes de álgebras asociativas. Sea $\mathfrak{A}$ un álgebra asociativa en $\mathfrak{A}$ se define el siguiente corchete o conmutador

$$[x, y] = xy - yx \quad x, y \in \mathfrak{A}$$

Este corchete define en $\mathfrak{A}$ una estructura de álgebra de Lie.

Example 2.1.5. Álgebras abelianas $[,] = 0$. En este caso, la estructura de álgebra de Lie no aporta nada a la estructura de espacio vectorial. Ejemplos de álgebras abelianas

(a) Si $\dim \mathfrak{g} = 1$ entonces $\mathfrak{g}$ es un álgebra abeliana.

(b) Todo subespacio de dimensión 1 de una álgebra de Lie es una subálgebra abeliana.

(c) El espacio de matrices diagonales es una subálgebra abeliana de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{F})$

$$\mathfrak{d}(n, \mathbb{F}) = \{x \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{F}) : x = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}\} \tag{2.1.2}$$

(d) El espacio de las matrices de la forma $\begin{pmatrix} a_1 & -b_1 & & & \\ b_1 & a_1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & a_k & -b_k \\ & & & b_k & a_k \end{pmatrix}$ como subálgebra de $\mathfrak{gl}(2k, \mathbb{F})$, es una álgebra abeliana. Todo subespacio de un álgebra abeliana es una subálgebra.

Examples 2.1.6. Subálgebras de $\mathfrak{gl}$:

(a) $\mathfrak{so}(n, \mathbb{F}) = \{x \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{F}) : x + x^t = 0\}$ donde x^t indica la traspuesta de la matriz x. El espacio de las matrices simétricas

$$\{x \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{F}) : x = x^t\}$$

no es una subálgebra si $n \geq 2$, pues si x, y son simétricas entonces $[x, y]$ es antisimétrica.

(b) $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{F}) = \{x \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{F}) : tr(x) = 0\}$, el corchete es cerrado pues $tr(xy) = tr(yx)$.

$$\mathfrak{sl}(n,\mathbb{F}) = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{F}\}$$

Una base de esta álgebra es $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\quad E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\quad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Para esta álgebra tenemos $[H, E] = 2E$, $[H, F] = -2F$ y $[E, F] = H$.

(c) El conjunto de las matrices triangulares superiores con ceros en la diagonal

$$\mathfrak{n}(n,\mathbb{F}) = \{x \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{F}) : x = \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}\} \tag{2.1.3}$$

es una subálgebra; y se denomina álgebra de matrices triangulares superior estricta.

Sea e_{ij} como en el ejemplo 2.1.3 una base para esta álgebra sería el siguiente conjunto

$$\{e_{ij} : i < j, i, j = 1, \cdots, n\}$$

(d) El espacio de las matrices triangulares superiores

$$\mathfrak{t}(n,\mathbb{F}) \quad = \quad \{x \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{F}) : x = \begin{pmatrix} a_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}\} \tag{2.1.4}$$

es una subálgebra.

Sea e_{ij} como en el ejemplo anterior una base para esta álgebra sería el siguiente conjunto

$$\{e_{ij} : i \leq j, i, j = 1, \cdots, n\}$$

(e) $\mathfrak{sp}(2n,\mathbb{F}) = \{x \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{F}) : xj + jx^t = 0\}$ donde j es una matriz en bloque nxn

$$j = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

donde 0 representa la matriz nula y 1 la matriz identidad ambas nxn.

(f) $\mathfrak{so}(p,q,\mathbb{F}) = \{x \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{F}) : xj + jx^t = 0\}$ donde

$$j = \begin{pmatrix} -1_{p\times p} & 0 \\ 0 & 1_{q\times q} \end{pmatrix}$$

Example 2.1.7. Álgebras de Lie de dimensión menor igual que 2. Toda álgebra de Lie de dimensión 1 es abeliana. Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie de dimensión 2 sobre el cuerpo $\mathbb{F}$ existen dos posibilidades

(a) $\mathfrak{g}$ es abeliana

(b) Existe una base $\{x, y\}$ de $\mathfrak{g}$ tal que

$$[x, y] = y$$

y a partir de ahí el corchete de dos elementos de $\mathfrak{g}$ está dado

$$[ax + by, cx + dy] = (ad - bc)[x, y] = (ad - bc)y$$

De hecho supongamos que $\mathfrak{g}$ no es abeliana y tomemos una base $\{x', y'\}$ de $\mathfrak{g}$. Entonces, $[x', y'] \neq 0$ pues caso contrario $\mathfrak{g}$ sería abeliana. Sea $y'' = [x', y']$ y escojamos x'' de manera que $\{x'', y''\}$ sea una base de $\mathfrak{g}$. Entonces $x'' = ax' + by', y'' = cx' + dy'$ y

$$[x'', y''] = \alpha y''$$

con $\alpha \neq 0$. Los elementos $x = \frac{1}{\alpha}x''$ e $y = y''$ nos da la base requerida. Como álgebras de Lie tenemos

$$\mathfrak{g}_1 = \{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & -a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{F}\} \text{ y } \mathfrak{g}_2 = \{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{F}\}$$

son ejemplos concretos de álgebras de Lie de dimensión dos no abeliana.

Observar que $\mathfrak{g}_1$ es una subálgebra de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{F})$.

2.2. Morfismos e Ideales

Definición 2.2.1. Sean $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$ dos álgebras de Lie,sea $\psi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ una transformación lineal es un

- homomorfismo si $\psi[x, y] = [\psi x, \psi y]$;
- isomorfismo si es un homomorfismo invertible
- automorfismo si es un isomorfismo $\mathfrak{g} = \mathfrak{h}$ Las álgebras $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$ son isomorfas si existe un isomorfismo $\psi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$.

Example 2.2.2. Los homomorfismos entre álgebras abelianas son las transformaciones lineales. Dos álgebras abelianas son isomorfas sí y sólo si tienen la misma dimensión.

Example 2.2.3. La aplicación traza

$$tr : \mathfrak{gl}(n, \mathbb{F}) \to \mathbb{F}$$

es un homomorfismo, pues $tr(xy - yx) = 0$ para cualquier transformación lineal x, y y por lo tanto $tr[x, y] = 0 = [trx, try]$ ya que $\mathbb{F}$ es abeliana.

Un homomorfismo muy importante es la transformación adjunta.

Definition 2.2.4. Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie se define

$$\text{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$$

$\text{ad}x(y) = [x, y]$ para todo $x, y \in \mathfrak{g}$. Se sigue de la bilinealidad que $\text{ad}x$ es lineal para todo x y que $x \to \text{ad}x$ es lineal. Para demostrar que es un homomorfismo de álgebra de Lie hay que chequear

$$\text{ad}([x, y]) = \text{ad}x \circ \text{ad}y - \text{ad}y \circ \text{ad}x \text{ para todo } x, y \in \mathfrak{g};$$

pero esto es equivalente a la identidad de Jacobi.

Definición 2.2.5. Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie, un subespacio $\mathfrak{h}$ es un *ideal* si

$$\forall y \in \mathfrak{h}, x \in \mathfrak{g}, \qquad [x, y] \in \mathfrak{h},$$

Es decir

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}] = \{[x, y] : x \in \mathfrak{g}, y \in \mathfrak{h}\} \subset \mathfrak{h}$$

Examples 2.2.6. Todo ideal es una subálgebra pero no toda subálgebra es un ideal.

Por ejemplo el subespacio de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{F})$ generado por $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ es una subálgebra por ser unidimensional y no es un ideal pues

$$[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}] = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Todo subespacio de una álgebra abeliana es un ideal.

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie entonces 0 y $\mathfrak{g}$ son ideales y se denominan ideales triviales.

Definición 2.2.7. Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie *no abeliana* cuyos únicos ideales son los triviales, se dice que $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie *simple*

Definición 2.2.8. Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie se denomina *centro* de $\mathfrak{g}$ al siguiente conjunto

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{x \in \mathfrak{g} : [x, y] = 0 \, \forall \, y \in \mathfrak{g}\}$$

El centro es un ideal.

Examples 2.2.9. Sea $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{F})$ el $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = 0$ pues sea $x = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ entonces

$$[x, H] = [\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}] = \begin{pmatrix} 0 & -2b \\ 2c & 0 \end{pmatrix} \tag{2.2.1}$$

Por lo tanto si $x \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ se debe cumplir $b = 0$ y $c = 0$. Por otro lado

$$[\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}] = \begin{pmatrix} 0 & 2a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.2.2}$$

en consecuencia x está en el centro si $x = 0$.

Example 2.2.10. El álgebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{F})$ es un álgebra de Lie simple.

Sea $I \neq 0$ un ideal de $\mathfrak{g}$, sea $0 \neq x \in I$ entonces $[x, H] \in I$ y

$$[[x, H], E] = -2c \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

por lo tanto $H \in I$ si $c \neq 0$. Si $c = 0$ y $b = 0$ entonces $a \neq 0$ y

$$x = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in I$$

entonces $H \in I$ y por último si $b \neq 0$ entonces

$$[[x, H], F] = 2b \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in I$$

entonces $H \in I$. Como $[x, H] \in I$ para todo $x \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{F})$, entonces $[E, H] = -2E \in I$ y $[F, H] = 2F \in I$ por lo que $E, F \in I$. Con lo que concluimos que $I = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$.

Notar que estamos trabajando con un cuerpo de característica 0. El centro de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{F})$ depende de la característica del cuerpo.

Example 2.2.11. Sea $\mathfrak{b}$ la subálgebra de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{F})$ generada por H, E. $\mathfrak{b}$ tiene dimensión 2 y se denomina subálgebra de *Borel* de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{F})$.

$$\mathfrak{b} = \{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & -a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{F}\}$$

Tomando $c = 0$ en 2.2.1, obtenemos que para que $x \in \mathfrak{z}(\mathfrak{b})$ se debe cumplir $b = 0$ y por 2.2.2 tenemos $a = 0$ entonces $\mathfrak{z}(\mathfrak{b}) = 0$.

Los ideales de $\mathfrak{b}$ son los triviales e $I = \{\alpha E : \alpha \in \mathbb{F}\}$. $\mathfrak{b}$ no es simple. Además $[I, I] = 0$.

Example 2.2.12. Sea I y J ideales del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ y sea

$$I + J = \{x + y : x \in I, y \in J\}$$

$I + J$ es un ideal $\mathfrak{g}$.

Example 2.2.13. Sea I y J ideales del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ y sea

$$[I, J] = \langle\{[x, y] : x \in I, y \in J\}\rangle$$

donde $\langle\rangle$ significa subespacio generado. $[I, J]$ es un ideal.

Tenemos un importante ejemplo cuando $I = J = \mathfrak{g}$ y denotamos $\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ a $\mathfrak{g}'$ se le denomina el álgebra derivada de $\mathfrak{g}$.

Sea $\psi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ un homomorfismo. Es inmediato verificar

- $\operatorname{Nu}\psi$ es un ideal
- $\operatorname{im}\psi$ es una subálgebra.

2.3. Cocientes y Teoremas de isomorfismo

Definición 2.3.1. Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie y $\mathfrak{h}$ un ideal. En el espacio vectorial cociente $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, se define

$$[\overline{x}, \overline{y}] = \overline{[x, y]}$$

donde $\overline{x}$ denota la clase $x + \mathfrak{h}$. Se debe demostrar que el corchete no depende de la elección de los representantes de las clases. Este corchete define en $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ una estructura de álgebra de Lie. Es necesario que $\mathfrak{h}$ sea un ideal para que el corchete esté bien definido.

Se define

$$\begin{array}{rcl} \theta : \mathfrak{g} & \to & \mathfrak{g}/\mathfrak{h} \\ x & \mapsto & \overline{x} \end{array}$$

θ es un homomorfismo sobreyectivo de álgebras de Lie y se denomina homomorfismo canónico.

Theorem 2.3.2. *(a) Sea $\psi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ un homomorfismo. Entonces*

$$\mathfrak{g}/\operatorname{Nu}\psi \simeq \operatorname{im}\psi$$

El isomorfismo está dado por la aplicación

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{g}/Nu\psi & \to & \operatorname{im}\psi \\ \overline{x} & \mapsto & \psi(x) \end{array}$$

(b) Sea $\mathfrak{g}$ álgebra de Lie y $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2 \subset \mathfrak{g}$ ideales de $\mathfrak{g}$. Entonces,

$$(\mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2)/\mathfrak{h}_1 \simeq \mathfrak{h}_2/\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2.$$

El isomorfismo pasando al cociente es

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2 & \to & \mathfrak{h}_2/\mathfrak{h}_1 \cap \mathfrak{h}_2 \\ x_1 + x_2 & \mapsto & x_2 \end{array}$$

Example 2.3.3. Supongamos que $\mathfrak{g}$ es la suma directa de

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h}_1 + \mathfrak{h}_2$$

con $\mathfrak{h}_1$ ideal y $\mathfrak{h}_2$ subálgebra. Entonces $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}_1 \simeq \mathfrak{h}_2$. El isomorfismo está dado por

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{h}_2 & \to & \mathfrak{g}/\mathfrak{h}_1 \\ x & \mapsto & \overline{x} = x + \mathfrak{h}_1. \end{array}$$

Example 2.3.4. El subconjunto

$$\mathfrak{z} = \{a1 \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{F}) : a \in \mathbb{F}\}$$

donde 1 es la identidad es un ideal de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{F})$. Además $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{F}) = \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{sl}(n, \mathbb{F})$, por el ejemplo anterior tenemos $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{F})/\mathfrak{z} \simeq \mathfrak{sl}(n, \mathbb{F})$.

Example 2.3.5. Sean

$$\mathfrak{g} = \{x \in \mathfrak{gl}(3, \mathbb{F}) : x = \begin{pmatrix} 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\}$$

y

$$\mathfrak{h} = \{x \in \mathfrak{gl}(3, \mathbb{F}) : x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\}$$

$\mathfrak{h}$ es un ideal de $\mathfrak{g}$. $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ es un álgebra de Lie abeliana de dimensión 2. El álgebra $\mathfrak{g}$ se conoce como el álgebra de Heisenberg.

2.3.1. Correspondencia entre ideales

Supongamos que I es un ideal de una álgebra $\mathfrak{g}$. Existe una correspondencia biyectiva entre los ideales del álgebra factor $\mathfrak{g}/I$ y los ideales de $\mathfrak{g}$ que contienen a I.

Proposition 2.3.6. *Si J es un ideal de $\mathfrak{g}$ tal que $I \subseteq J$, entonces J/I es un ideal de $\mathfrak{g}/I$. Inversamente si K es un ideal de $\mathfrak{g}/I$, entonces el conjunto $J = \{z \in \mathfrak{g} : z + I \in K\}$ es un ideal de $\mathfrak{g}$ y $K \subseteq J$.*

2.3.2. Suma directa de álgebras de Lie

Definición 2.3.7. Sean $\mathfrak{g}_1, \cdots, \mathfrak{g}_n$ álgebras de Lie y

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_n$$

una suma directa como espacios vectoriales. Esto es, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \times \cdots \times \mathfrak{g}_n$. Para $x = (x_1, \cdots, x_n)$, $y = (y_1, \cdots, y_n)$, se define

$$[x, y] = ([x_1, y_1], \cdots, [x_n, y_n])$$

define en $\mathfrak{g}$ una estructura de álgebra de Lie en la que la i-ésima componente es un ideal isomorfo $\mathfrak{g}_i$. De modo semejante puede definirse un producto directo y una suma directa de infinitos téminos.

2.4. Derivaciones

Definition 2.4.1. Una aplicación lineal $D : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ es una derivación de álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ si satisface

$$D[x, y] = [Dx, y] + [x, Dy] \text{ para todo } x, y \in \mathfrak{g}$$

De un modo más general, una derivación de un álgebra arbitraria es una transformación lineal que satisface la regla de Leibniz de derivada de un producto $D(xy) = D(x)y + xD(y)$.

Example 2.4.2. La $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ es una derivación pues por la identidad de Jacobi tenemos

$$\mathrm{ad}(x)[y, z] = [x, [y, z]] = [[x, y], z] + [y, [x, z]]$$

Las derivaciones de este tipo se denominan *derivaciones internas*. El conjunto de estas derivaciones coincide con la imagen de la representación adjunta. El espacio de las derivaciones internas es una subálgebra de $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$. No es difícil verificar que el conjunto de todas las derivaciones es una subálgebra de $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$.

Example 2.4.3. Toda transformación lineal en un álgebra abeliana es una derivación.

Example 2.4.4. Sea $\mathfrak{b}$ la subálgebra de Borel de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, es decir que $\mathfrak{b} = \langle H, E\rangle$, con $[H, E] = 2E$. Sea $D : \mathfrak{b} \to \mathfrak{b}$ lineal que en la base $\{H, E\}$ se representa como

$$D = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

Para encontrar una relación entre a, b, c, d para que D sea una derivación es suficiente usar la relación $2DE = D[H, E] = [DH, E] + [H, DE]$.

Obtenemos

$$2(cH + dE) = [aH + bE, E] + [H, cH + dE]$$

$$cH + dE = \frac{a + d}{2}[H, E]$$

Entonces $a = 0$ y $c = 0$. Por lo tanto las matrices de derivación de $\mathfrak{b}$ son de la forma

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & d \end{pmatrix}$$

Estas matrices tienen la misma forma que las matrices que aparecen en la representación adjunta de $\mathfrak{b}$. Por lo tanto todas las derivaciones de $\mathfrak{b}$ son internas.

2.5. Álgebras de Lie Nilpotentes

Es natural estudiar el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ a través de sus ideales. Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie e I un ideal nos preguntamos ¿cuándo el álgebra cociente g/I es una álgebra abeliana?. El siguiente Lema nos da la respuesta.

Lemma 2.5.1. *Sea I un ideal de $\mathfrak{g}$. Entonces $\mathfrak{g}/I$ es abeliana si y sólo si I contiene álgebra derivada* $\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

Este Lema nos dice que el álgebra derivada $\mathfrak{g}'$ es el menor ideal de $\mathfrak{g}$ para el cual el cociente es abeliano. Por el mismo argumento el álgebra derivada $\mathfrak{g}'$ tiene un ideal contenido en si misma cuyo cociente es abeliano y así sucesivamente generando una serie decreciente de cocientes abelianos.

Definition 2.5.2. Se define una sucesión de ideales de $\mathfrak{g}$

$$\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g}, \quad \mathfrak{g}^1 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \quad \mathfrak{g}^2 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^1], \cdots, \mathfrak{g}^i = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{i-1}]$$

Esta serie se denomina *serie central descendente*, la razón para el nombre "*serie central*"proviene del hecho que el factor $\mathfrak{g}^k/\mathfrak{g}^{k+1}$ está contenido en el centro de $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}^{k+1}$

Definition 2.5.3. El álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ se dice *nilpotente* si existe n tal que $\mathfrak{g}^n = 0$

Examples 2.5.4. (a) Toda álgebra de Lie abeliana es nilpotente.

(b) Toda álgebra de Lie nilpotente es soluble, pues se demuestra $\mathfrak{g}^{(i)} \subseteq \mathfrak{g}^i$ haciendo inducción en i.

Veamos que la inversa de la última afirmación es falsa. Sea $\mathfrak{g} = \mathfrak{t}(n, \mathbb{F})$ en la sección 2.6 se mostró que $\mathfrak{g}^1 = \mathfrak{g}^{(1)} = \mathfrak{n}(n, \mathbb{F})$, observar que la fórmula 2.6.1 es también válida si $i \leq j$ entonces $\mathfrak{g}^2 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^1] = \mathfrak{g}^1$ por lo tanto $\mathfrak{g}^i = \mathfrak{g}^1$para todo $i \geq 1$. Así $\mathfrak{t}(n, \mathbb{F})$ es soluble pero no es nilpotente.

El álgebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}(n, \mathbb{F})$ es nilpotente. Pues $\mathfrak{g}^1$ es el espacio generado por aquellos e_{ij} de nivel > 2, $\mathfrak{g}^2$ está generado por los de nivel $> 3, \ldots, \mathfrak{g}^i$ por los de nivel $> i + 1$. Por lo tanto existe n tal que $\mathfrak{g}^n = 0$.

La siguiente proposición nos muestra propiedades de las álgebras de Lie nilpotente.

Proposition 2.5.5. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie .*

(a) Si $\mathfrak{g}$ es nilpotente entonces toda subálgebra o imagen homomórfica de $\mathfrak{g}$ es nilpotente.

(b) Si $\mathfrak{g}/\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ es nilpotente, entonces $\mathfrak{g}$ es nilpotente.

(c) Si $\mathfrak{g}$ es nilpotente distinta de 0, entonces $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \neq 0$.

Demostración. Para demostrar a) se imita la prueba de la proposición 2.6.6.

b) Sea n tal que $\mathfrak{g}^n \subset \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$, entonces $\mathfrak{g}^{n+1} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^n] \subset [\mathfrak{g}, \mathfrak{z}(\mathfrak{g})] = 0$ c) El último término no nulo de la serie central descendente está contenido en el centro. $\square$

Definition 2.5.6. Sean $\mathfrak{g}$ álgebra de Lie y $x \in \mathfrak{g}$ decimos que x es *ad-nilpotente* si $\mathrm{ad}(x)$ es un endomorfismo nilpotente.

Theorem 2.5.7. *(Engel) Si todos los elementos del álgebra $\mathfrak{g}$ son ad-nilpotente entonces $\mathfrak{g}$ es nilpotente.*

Usando este teorema se puede demostrar que $\mathfrak{n}(n, \mathbb{F})$ es nilpotente sin calcular la serie central descendente.

Lemma 2.5.8. *Si $x \in \mathfrak{gl}(V)$ es un endomorfismo nilpotente entonces $ad(x)$ es nilpotente.*

La demostración del Teorema de Engel se realiza utilizando el siguiente teorema el cual es muy interesante en si mismo.

Theorem 2.5.9. *Sea $\mathfrak{g}$ una subálgebra de $\mathfrak{gl}(V)$, con dimensión de V finita. Si todos los elementos de $\mathfrak{g}$ son endomorfismos nilpotentes y $V \neq 0$ entonces existe un elemento $0 \neq v \in V$ autovector simultáneo de $\mathfrak{g}$; es decir $x.v = 0$ para todo $x \in \mathfrak{g}$.*

Para la demostración de este teorema se realiza inducción en la dimensión de $\mathfrak{g}$.

2.6. Álgebras de Lie Solubles y Semisimples

Definition 2.6.1. Se define la serie derivada como la serie con términos

$$\mathfrak{g}^{(1)} = \mathfrak{g}' \qquad \text{y} \qquad \mathfrak{g}^{(k)} = [\mathfrak{g}^{(k-1)}, \mathfrak{g}^{(k-1)}] \qquad \text{para } k \geq 2.$$

Entonces

$$\mathfrak{g} \supseteq \mathfrak{g}^{(1)} \supseteq \cdots \supseteq \mathfrak{g}^{(k)} \cdots$$

Los $\mathfrak{g}^{(k)}$ son ideales por ser producto de ideales.

Definition 2.6.2. El álgebra de Lie se dice *soluble* si existe $m \geq 1$ para el cual $\mathfrak{g}^{(m)} = 0$

Examples 2.6.3. (a) Toda álgebra de Lie abeliana es soluble.

(b) Las álgebras simples no abelianas $\mathfrak{g}$ no son solubles, pues el álgebra derivada es $\mathfrak{g}$ y por lo tanto $\mathfrak{g}^{(m)} = \mathfrak{g}$. Por lo tanto $\mathfrak{sl}(2, \mathcal{F})$ no es soluble.

(c) La subálgebra de Borel $\mathfrak{b} = \langle H, E\rangle$ es soluble pues $\mathfrak{b}' = \langle E\rangle$ y $\mathfrak{b}^{(2)} = 0$.

(d) El álgebra de Heisenberg H de dim 3 generada por x, y, z con $[x, y] = z$ es soluble pues $\mathfrak{g}^{(1)} = \langle z\rangle$ y $\mathfrak{g}^{(2)} = 0$.

Example 2.6.4. El álgebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{t}(n, \mathbb{F})$ de matrices triangulares superior introducida en 2.1.4, es soluble.

Definition 2.6.5. Dada la matriz e_{ij} al número entero $j - i$ se le denomina nivel de e_{ij}.

Para mostrar la solubilidad se calculará explícitamente el álgebra derivada.

$\mathfrak{g}' = \mathfrak{n}(n, \mathbb{F})$ donde $\mathfrak{n}(n, \mathbb{F})$ son las matrices triangulares superior estricta introducidas en 2.1.3.

Demostración. Utilizando la fórmula introducida en 2.1.1 tenemos

$$[e_{ii}, e_{il}] = e_{il} \text{ para } i < l,$$

lo cual muestra $\mathfrak{n}(n, \mathbb{F}) \subset [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. □

Como $\mathfrak{t}(n, \mathbb{F}) = \mathfrak{d}(n, \mathbb{F}) + \mathfrak{n}(n, \mathbb{F})$ donde $\mathfrak{d}(n, \mathbb{F})$ es el álgebra de las matrices diagonales introducida en 2.1.2, utilizando que el producto entre un elemento de $\mathfrak{d}(n, \mathbb{F})$ con uno de $\mathfrak{n}(n, \mathbb{F})$ pertenece a $\mathfrak{n}(n, \mathbb{F})$ y esta última es un álgebra abeliana podemos concluir que $\mathfrak{n}(n, \mathbb{F}) = \mathfrak{g}'$.

Una base para $\mathfrak{g}^{(k)}$ es el conjunto de todas las matrices e_{ij} con $j - i \geq 2^{k-1}$.

Las matrices de $\mathfrak{n}(n, \mathbb{F})$ tienen nivel ≥ 1. Sean e_{ij}, e_{kl} elementos de la base de $\mathfrak{n}(n, \mathbb{F})$ por lo tanto $i < j$ y $k < l$ entonces

$$[e_{ij}, e_{kl}] = \begin{cases} e_{il}, & \text{si; } j = k \\ 0, & \text{cualquier otro caso.} \end{cases} \tag{2.6.1}$$

Por lo tanto $\mathfrak{g}^{(2)} = [\mathfrak{n}(n, \mathbb{F}), \mathfrak{n}(n, \mathbb{F})]$ está generado por las e_{ij} con $i < j$ y de nivel ≥ 2, por inducción tenemos que $\mathfrak{g}^{(k)}$ está generado por matrices de nivel $\geq 2^{k-1}$.

Entonces existe un k tal que $\mathfrak{g}^{(k)} = 0$, pues $2^{k-1} \leq n - 1$. Entonces $\mathfrak{t}(n, \mathbb{F})$ es soluble.

Proposition 2.6.6. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie.*

(a) Si $\mathfrak{g}$ es soluble entonces todas sus subálgebras y todas sus imágenes homomorficas son solubles.

(b) Si I es un ideal soluble de $\mathfrak{g}$ tal que $\mathfrak{g}/I$ es soluble entonces $\mathfrak{g}$ es soluble.

Demostración.

(a) De la definición, de la serie derivada tenemos que si $\mathfrak{h}$ es una subálgebra de $\mathfrak{g}$ entonces $\mathfrak{h}^{(i)} \subseteq \mathfrak{g}^{(i)}$. De modo similar si $\phi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{s}$ es un epimorfismo es fácil deducir que $\phi(\mathfrak{g}^{(i)}) = \mathfrak{s}^{(i)}$.

(b) Por hipótesis existe n tal que $\mathfrak{g}/I^{(n)} = 0$ aplicando la parte a)al homomorfismo canónico $\theta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/I^{(n)} = 0$, nos da $\theta(\mathfrak{g}^{(n)}) = 0$, y $\mathfrak{g}^{(n)} \subseteq \mathrm{Nu}(\theta) = I$.

Notar $(\mathfrak{g}^{(i)})^{(j)} = \mathfrak{g}^{(i+j)}$. Por hipótesis $I^{(m)} = 0$ para algún m entonces $(\mathfrak{g}^{(n)})^m \subseteq I^{(m)} = 0$; y nos da $\mathfrak{g}^{(n+m)} = 0$.

(c) Por un teorema de isomorfismo tenemos

$$(I + J)/J \simeq I/(I \cap J)$$

Como $\theta(I) = I/(I \cap J)$ entonces $I/(I \cap J)$ es soluble por b) obtenemos $I + J$ soluble.

□

Definition 2.6.7. Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie un ideal R se dice maximal si no existe $I \neq R$ ideal de $\mathfrak{g}$ tal que $R \subseteq I$.

Corollary 2.6.8. *Toda álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ admite un único ideal maximal soluble.*

Demostración. Sea R un ideal soluble de dimensión máxima, (R es maximal) y sea I otro ideal soluble por parte c) de la proposición 2.6.6 $R + I$ es un ideal soluble pero $R \subseteq R + I$ entonces $\dim R \leq \dim R + I$ y como R tiene dimensión máxima nos da $\dim R = \dim R + I$ por lo que $R = R + I$ y $I \subseteq R$.

Hemos probado la existencia y unicidad de un ideal maximal soluble, a este ideal denominamos *radical* del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ y se denota $\mathrm{Rad}\,\mathfrak{g}$.

Definition 2.6.9. Se dice que el álgebra $\mathfrak{g}$ es *semisimple* si $\mathrm{Rad}\,\mathfrak{g}$=0.

Examples 2.6.10. (a) Toda álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ *simple* es *semisimple*, pues como $\mathfrak{g}$ no es soluble entonces $\mathrm{Rad}\,\mathfrak{g} = 0$.

(b) También $\mathfrak{g} = 0$ es *semisimple.*

(c) El álgebra $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ es *semisimple*, pues es simple. Ver Ejemplo 2.2.10.

(d) La subálgebra $\mathfrak{b}$ de Borel de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ no es semisimple pues es soluble.

(e) Si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie arbitraria entonces $\mathfrak{g}/\mathrm{Rad}\,\mathfrak{g}$ es semisimple.

Demostración. Sea J el ideal soluble maximal de $\mathfrak{g}/\mathrm{Rad}\,\mathfrak{g}$ entonces existe I ideal de $\mathfrak{g}$ tal que $I \supseteq \mathrm{Rad}\,\mathfrak{g}$ y $J = I/\mathrm{Rad}\,\mathfrak{g}$. Por el inciso b) de la proposición 2.6.6 I es soluble y nos da $I = \mathrm{Rad}\,\mathfrak{g}$ que es lo se quiere probar. □

Remark 2.6.11. El centro de una álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es un ideal abeliano, y por lo tanto soluble. Como consecuencia tenemos que el centro de una álgebra de Lie semisimple es necesariamente nulo.

Como el núcleo de la representación adjunta del álgebra $\mathfrak{g}$ coincide con el centro de $\mathfrak{g}$, si $\mathfrak{g}$ es semisimple la representación adjunta es fiel. Por eso toda álgebra semisimple puede ser vista como una subálgebra de las transformaciones lineales.

2.6.1. Teorema de Lie

El teorema de Lie es de naturaleza similar al teorema de Engel pero para su validez es esencial pedir que $\mathbb{F}$ sea algebraicamente cerrado.

Theorem 2.6.12. *Sea $\mathfrak{g}$ una subálgebra soluble de $\mathfrak{gl}(V), V$ de dimensión finita. Si $V \neq 0$, entonces V contiene un autovector común para todos los automorfismos de $\mathfrak{g}$.*

La demostración de este teorema se realiza haciendo inducción en la dimensión de $\mathfrak{g}$. La idea es localizar primero un ideal K de codimensión uno, luego se muestra por inducción que existe un autovector común para K, y por último se verifica que $\mathfrak{g}$ estabiliza un espacio que consiste de tales autovectores, para encontrar en tal espacio un autovector z en $\mathfrak{g}$ que satisface $\mathfrak{g} = K + F.z$.

Corollary 2.6.13. *(Teorema de Lie) Sea $\mathfrak{g}$ una subálgebra soluble de $\mathfrak{gl}(V), \dim V = n < \infty$. Entonces existe una base de V tal que las matrices de $\mathfrak{g}$ son triangulares superiores.*

Para demostrar este corolario hacer inducción en la dimensión de V. Finalmente, estos resultados son cruciales para probar el siguiente teorema.

Theorem 2.6.14. *Toda álgebra de Lie semisimple se puede descomponer como suma directa de ideales simples.*

Capítulo 3

Representaciones de Álgebras de Lie

En este capítulo se desarrollan conceptos básicos y ejemplos de la teoría de representaciones de álgebras de Lie. En la segunda sección se realiza en forma detallada la teoría de representaciones irreducibles de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$; por ser necesaria para este trabajo y porque a través de estas se comprenden las representaciones de las álgebras de Lie semisimples. Algunos teoremas y proposiciones se enuncian únicamente, sus demostraciones pueden encontrarse en los libros [6] y [2].También se define y muestran propiedades de la familia de álgebras de Lie $\mathfrak{b}_n$ para la cual se calculará la dimensión de la homología.

3.1. Definiciones Básicas

Definition 3.1.1. Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$ y $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie sobre el mismo cuerpo $\mathbb{F}$. Una *representación* de $\mathfrak{g}$ en V es un homomorfismo de álgebras de Lie

$$\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V).$$

V se denomina el *espacio de representación* y su dimensión es la *dimensión de la representación*. Dada una representación de $\mathfrak{g}$ en V, es común decir que V es un $\mathfrak{g}$-módulo. Una representación se dice *fiel* si es inyectiva.

La noción de representación nos permite representar álgebras de Lie como álgebras de transformaciones lineales. Si la dimensión de V es finita, y π es una representación fiel, $\mathfrak{g} \simeq \operatorname{Im}\pi$ y por lo tanto el álgebra se puede ver como una subálgebra de transformaciones lineales o matrices.

Todas las álgebras de Lie de dimensión finita puede verse como una subálgebra de transformaciones lineales. Esto se debe a un conocido resultado, el teorema de Ado, el cual afirma que toda álgebra de Lie de dimensión finita admite una representación fiel también de dimensión finita.

3.1.1. Ejemplos

(a) La aplicación

$$\begin{array}{rccc} \pi : & \mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathfrak{gl}(V) \\ & X & \longmapsto & 0 \end{array}$$

es la representación trivial.

(b) Sea $\mathfrak{g}$ una subálgebra de $\mathfrak{gl}(V)$, la identidad define una representación de $\mathfrak{g}$ en V, denominada representación canónica.

(c) Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie de dimensión dos, con base X, Y y tabla de multiplicar $[X, Y] = Y$. La transformación lineal
$$\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(2, \mathbb{F})$$
que asigna
$$\pi(X) = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}, \quad \pi(Y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
define una representación fiel de $\mathfrak{g}$ en V. Su imagen es
$$\operatorname{Im} \pi = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & -a \end{pmatrix} : a, b \in k \right\}$$

(d) La aplicación
$$\begin{array}{rccc} \pi_1 : & \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathfrak{gl}(3, \mathbb{C}) \\ & \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 2a & 2b & 0 \\ c & 0 & b \\ 0 & 2c & -2a \end{pmatrix} \end{array}$$
es una representación de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ en V. En efecto, sea la base canónica $\{E, H, F\}$ de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ donde
$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
Sus coeficientes de estructura están dados por
$$[H, E] = 2E, \;\; [H, F] = -2F, \;\; [E, F] = H.$$
Los transformados de los elementos de la base canónica
$$\pi_1(E) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \pi_1(H) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \pi_1(F) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$
forman una base de $\operatorname{im} \pi$ que tiene los mismos coeficientes de estructura

(e) La aplicación
$$\begin{array}{rccc} \pi_2 : & \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) & \longrightarrow & Der\,\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \\ & E & \longmapsto & \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ & H & \longmapsto & \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \\ & F & \longmapsto & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$
también es una representación de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ en $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, basta verificar que $\pi_2(E)$, $\pi_2(H)$, $\pi_2(F)$ tienen la misma tabla de multiplicar.

Representaciones equivalentes

Sean π_1 y π_2 dos representaciones de una misma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ en los espacios V_1 y V_2 respectivamente. Estas representaciones se dicen *equivalentes* si existe un isomorfismo lineal $P : V_1 \mapsto V_2$ tal que:

$$\pi_2(X) \circ P = P \circ \pi_1(X)$$

para cualquier $x \in \mathfrak{g}$. Recíprocamente, dados una representación π_1 y un isomorfismo lineal P, definiendo π_2 a partir de la expresión de arriba, se obtiene una representación equivalente a π_1. El isomorfismo que realiza la equivalencia entre las representaciones se denomina *operador de intercambio* entre π_1 y π_2.

Example 3.1.2. Las representaciones π_1 y π_2 de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ en un espacio V de dimensión 3 y en $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ respectivasmente, dadas por los ejemplos anteriores son equivalentes. Si denotamos una base de V como v_1, v_2, v_3 y tomamos la base canónica de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, el isomorfismo P que existe entre V y $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ es el siguiente:

$$\begin{array}{rccc} P: & V & \longrightarrow & \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \\ \\ & v_1 & \longmapsto & E \\ \\ & v_2 & \longmapsto & -H \\ \\ & v_3 & \longmapsto & -F \end{array}$$

y satisface $\pi_2(x) \circ P = P \circ \pi_1(x)$

3.1.2. Representación adjunta

Definición 3.1.3. Dado un elemento x en el álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, consideramos la transformación lineal

$$\begin{array}{rccc} ad(x): & \mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathfrak{g} \\ \\ & x & \longmapsto & ad(x)(y) = [x,y] \end{array}$$

La aplicación

$$\begin{array}{rccc} ad: & \mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \\ \\ & y & \longmapsto & ad(x) \end{array}$$

define una representación de $\mathfrak{g}$ en $\mathfrak{g}$, denominada *representación adjunta*.

La linealidad de ad proviene de la bilinealidad del corchete. Mientras que la propiedad de homomorfismo de ad es equivalente a la identidad de Jacobi. Recordemos que $ad(x)$ es una derivación de $\mathfrak{g}$, llamada *derivación interior*, por lo que la representación adjunta puede reescribirse de la siguiente forma:

$$ad: \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{Der}(\mathfrak{g})$$

El núcleo de la representación adjunta es el *centro* de $\mathfrak{g}$ pues:

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{x \in \mathfrak{g} : [x,y] = 0 = ad(x)(y) \text{ para todo } y \in \mathfrak{g}\}.$$

Si $\mathfrak{g}$ es simple $\mathfrak{z} = 0$, entonces $ad : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ es un monomorfismo. Esto significa que toda álgebra de Lie simple a un álgebra de Lie lineal.

Example 3.1.4. La representación π_2 del Ejemplo 3.1.1 es la adjunta de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$.

Example 3.1.5. Sea $\mathfrak{g}$ el álgebra de Lie no abeliana de dimensión 2, y sea $\{x, y\}$ una base de $\mathfrak{g}$ tal que $[x, y] = y$. En esa base la matriz de $ad(x)$ son

$$[ad(x)] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad\qquad [ad(y)] \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

La representación adjunta está dada por

$$[ad(ax + by)] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -b & a \end{pmatrix}$$

Esta es una representación fiel, por lo tanto el centro del álgebra es trivial.

3.1.3. Construcción de representaciones

Suma directa de representaciones

Sean $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie y $\pi_1, \ldots, \pi_n$ representaciones de $\mathfrak{g}$ en $V_1, \ldots, V_n$ respectivamente. Definimos

$$\begin{array}{rccl} \pi : & \mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathfrak{gl}(V_1 \oplus \ldots \oplus V_n) \\ & X & \longmapsto & \pi(X) = \pi_1(X) \oplus \ldots \oplus \pi_n(X) \end{array} .$$

Se puede verificar que π define una representación en $V_1 \oplus \ldots \oplus V_n$ denominada *suma directa* de las representaciones π_i. En el caso particular de que $n = 2$ la suma directa es

$$\pi(X)(v, w) = (\pi_1(X)(v), \pi_2(X)(w)) .$$

Producto tensorial de representaciones

Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie y π_i con $i = 1, ..., n$, representaciones de $\mathfrak{g}$ en V_i. Se define

$$\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V_1 \otimes \ldots \otimes V_n)$$

por

$$\pi(X)(v_1 \otimes v_2 \ldots \otimes v_n) = \pi_1(X)(v_1) \otimes v_2 \ldots \otimes v_n + \ldots + v_1 \otimes v_2 \ldots \otimes \pi_n(X)(v_n).$$

Entonces π define una representación de $\mathfrak{g}$ en $V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$. Este es el *producto tensorial* de representaciones. En el caso particular de $n = 2$ el producto tensorial es:

$$\pi(X)(v \otimes w) = \pi_1(X)(v) \otimes w + v \otimes \pi_2(X)(w).$$

Vale la pena observar que la aplicación $\pi(X) = \pi_1(X) \otimes \pi_2(X)$ no define una representación ya que no es lineal. Sin embargo será denotada por $\pi_1 \otimes \ldots \otimes \pi_n$ la representación definida en el producto tensorial a pesar de ser una notación que permita una interpretación equivocada. Sean ahora $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, ..., \mathfrak{g}_n$ álgebras de Lie y π_i las representaciones de $\mathfrak{g}_i$ en V_i con $i = 1, ..., n$. Se define una nueva representación de la suma directa en el producto tensorial:

$$\pi_1 \widehat{\otimes} \ldots \widehat{\otimes} \pi_n : \mathfrak{g}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{g}_n \longrightarrow \mathfrak{gl}(V_1 \otimes \ldots \otimes V_n)$$

Producto exterior de representaciones

Sea π una representación de $\mathfrak{g}$ en V. Se define una nueva representación de $\mathfrak{g}$ en el álgebra exterior $\bigwedge^n V$ de la siguiente manera

$$\bigwedge^n \pi(X)(v_1 \wedge \ldots \wedge v_n) = \sum_i v_1 \wedge \ldots \wedge \pi(X)(v_i) \wedge \ldots \wedge v_n.$$

Restricción de las representaciones

Sea π una representación de $\mathfrak{g}$ en V y supongamos W un subespacio *invariante* por π, es decir
$$\pi(X)W \subset W \quad \text{para todo } X \in \mathfrak{g}.$$
En este caso es común decir que W es un $\mathfrak{g}$-submódulo del $\mathfrak{g}$-módulo V. Además, la aplicación
$$\begin{array}{rccc} \pi|_W : & \mathfrak{g} & \longrightarrow & \mathfrak{gl}(W) \\ & X & \longmapsto & \pi(X)|_W \end{array}$$
define una representación de $\mathfrak{g}$ en W.

Sea π una representación de $\mathfrak{g}$ en V y $\mathfrak{h}$ una subágebra de $\mathfrak{g}$. La aplicación
$$\begin{array}{rccc} \pi|_{\mathfrak{h}} : & \mathfrak{h} & \longrightarrow & \mathfrak{gl}(V) \\ & X & \longmapsto & \pi(X) \end{array}$$
define una representación de $\mathfrak{h}$ en V.

3.1.4. Descomposición de Representaciones

Definición 3.1.6. Una representación π de $\mathfrak{g}$ en V se dice *irreducible* si los únicos subespacios invariantes son los triviales 0 y V.

Definición 3.1.7. Una representación π de $\mathfrak{g}$ en V se dice *completamente reducible* si V se descompone como
$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$$
con cada V_i invariante y tal que la restricción de π a V_i es irreducible. Dicho de otro modo π es completamente reducible si ella es isomorfa a $\bigoplus_i \pi_i$ donde $\pi_i = \pi|_{V_i}$ y π_i es irreducible. En general la descomposición de V en componentes irreducibles no es única. Las representaciones completamente reducible son denominadas también semisimples.

La proposición siguiente nos da un criterio, bastante utilizado, para verificar que una representación es completamente reducible.

Proposition 3.1.8. *Sea π una representación de dimensión finita de $\mathfrak{g}$ en V. Entonces, π es completamente reducible sí, y solo si, todo subespacio invariante por π admite un complementario invariante, es decir,*
$$\textit{para todo } W \subset V \textit{ invariante, existe } \quad W_1 \textit{ también invariante tal que}$$
$$V = W \oplus W_1$$

Example 3.1.9. La representación canónica del álgebra de Heisenberg
$$\mathfrak{g} = \{\begin{pmatrix} 0 & a & c \\ & 0 & b \\ & & 0 \end{pmatrix}\}$$
en $\mathbb{F}^3$ no es irreducible, pues los subespacios generados por $\{e_1\}$ y por $\{e_1, e_2\}$ son invariantes.

No es tampoco completamente reducible porque $< e_1 >$ que es invariante no admite complementario invariante. Pues dada $x \in \mathbb{F}^3 - < e_1 >$ con coordenadas $[x] = (0, x_2, x_3)$
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 + x_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in < e_1 >$$

Sea la subálgebra abeliana de $\mathfrak{gl}(4,\mathbb{F})$

$$\mathfrak{g} = \{diag\{a,a,b,b\} : a,b \in \mathbb{F}\}.$$

Sea π la representación trivial de $\mathfrak{g}$.

Denotando por $\{e_1 \cdots e_4\}$ la base canónica, una descomposición

$$\mathbb{F}^4 = < e_1 > \oplus < e_2 > \oplus < e_3 > \oplus < e_4 >$$

es una descomposición en subespacios π invariantes, irreducibles.

El subespacio $W = < e_1 + e_2 >$ es invariante para todo $x \in \mathfrak{g}$.

También

$$\mathbb{F}^4 = < e_1 + e_2 > \oplus < e_2 > \oplus < e_3 > \oplus < e_4 >$$

es una descomposición en subespacios π invariantes, irreducibles.

Por lo tanto la descomposición en subespacios invariantes e irreducibles no es única.

3.1.5. Producto Semidirecto

Sean $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$ dos álgebras de Lie y π una representación de $\mathfrak{g}$ en $\mathfrak{h}$ tal que $\pi(x)$ es una derivación de $\mathfrak{h}$ para todo $x \in \mathfrak{g}$. Se define en el producto cartesiano $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$ el siguiente corchete

$$[(x_1, y_1), (x_2, y_2)] = ([x_1, x_2], [y_1, y_2] + \pi(x_1)(y_2) - \pi(x_2)(y_1))$$

Con este corchete $\mathfrak{g} \times \mathfrak{h}$ es un álgebra de Lie que se descompone en suma directa

$$\mathfrak{g} \times \mathfrak{h} = (\mathfrak{g} \times 0) \oplus (0 \times \mathfrak{h})$$

de una subálgebra isomorfa a $\mathfrak{g}$ y un ideal isomorfo a $\mathfrak{h}$.

La notación para el producto semidirecto es $\mathfrak{g} \ltimes_s \mathfrak{h}$ o $\mathfrak{g} \ltimes_\pi \mathfrak{h}$. Esta última notación se usa cuando se desea resaltar la representación que define el producto semidirecto.

Si el álgebra de Lie $\mathfrak{L}$ es suma directa de una subálgebra $\mathfrak{g}$ y un ideal $\mathfrak{h}$, entonces ésta es isomorfa al producto semidirecto $\mathfrak{g} \ltimes_s \mathfrak{h}$, donde la representación de $\mathfrak{g}$ en $\mathfrak{h}$ está dada por la restricción a $\mathfrak{g}$ de la representación adjunta de $\mathfrak{L}$, lo cual es posible porque $\mathfrak{h}$ es un ideal.

Remark 3.1.10. (a) $[(x,0),(y,0] = ([x,y],0)$ para todo $x, y \in \mathfrak{g}$.

(b) $[(0,h),(0,\widetilde{h})] = (0,[h,\widetilde{h}])$ para todo $h, \widetilde{h} \in \mathfrak{h}$.

(c) $[(x,0),(0,h)] = (0,\pi(x)h)$ para todo $x \in \mathfrak{g}$ y $h \in \mathfrak{h}$.

(d) $[(0,h),(x,0)] = (0,-\pi(x)h)$ para todo $x \in \mathfrak{g}$ y $h \in \mathfrak{h}$.

Example 3.1.11. Si $\pi = 0$ el producto semidirecto coincide con el producto directo.

Example 3.1.12. Sean $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{h}$ álgebras de Lie con $\mathfrak{h}$ abeliana entonces cualquier representación $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{h})$ es tal que $\pi(\mathfrak{g}) \subseteq \mathrm{Der}(\mathfrak{h})$. Entonces para toda representación podemos definir $\mathfrak{g} \ltimes_\pi \mathfrak{h}$.

En particular tenemos que dada un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ y π una representación de $\mathfrak{g}$ en V, podemos considerar a V como un álgebra de Lie abeliana y definir $\mathfrak{g} \ltimes_\pi V$.

Sea $\mathfrak{b}$ la subálgebra de Borel de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{F})$ y sea π una representación de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{F})$, la cual al restringirla $\mathfrak{b}$ es una representación de $\mathfrak{b}$ en V.

Identificamos $(x,0)$ con x si $x \in \mathfrak{b}$, $(0,v)$ con v si $v \in V$, en el producto semidirecto $\mathfrak{b} \ltimes_\pi V$ tenemos el siguiente corchete

$$[H,E] = 2E, \qquad [v,w] = 0, \qquad [\alpha H + \beta E, v] = \alpha\pi(H)v + \beta\pi(E)v.$$

Sea $V = V_0 \bigoplus V_1$ donde $V_0 = \langle e_0 \rangle \simeq \mathbb{C}$, donde e_0 es autovector de H asociado al autovalor 0 $V_1 = \langle e_1, e_{-1} \rangle \simeq \mathbb{C}^2$, e_1, e_{-1} autovectores asociados a los autovalores de H 1 y -1 respectivamente, y $\pi = \pi_0 \oplus \pi_1$.

$$\pi_0(H) = 0, \quad \pi_0(E) = 0, \quad \pi_1(H) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \pi_1(E) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Las transformaciones lineales $\pi(H)$ y $\pi(E)$ están representadas en la base $\{1, e_1, e_{-1}\}$

$$\pi(H) = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right); \qquad \pi(E) = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

El conjunto $\{H, E, 1, e_1, e_{-1}\}$ es una base de $\mathfrak{b} \ltimes_\pi V$. Los coeficientes de estructura para esta álgebra de Lie están dados en la siguiente tabla

	H	E	e_0	e_1	e_{-1}
H	0	2E	0	e_1	$-e_{-1}$
E		0	0	0	e_{-1}
1			0	0	0
e_1				0	0
e_{-1}					0

3.2. Representaciones de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{F})$

Fijemos la siguiente base de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{F})$

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Comencemos construyendo una familia de representaciones irreducibles de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{F})$.

Sea $\mathbb{F}[X, Y]$ el espacio de polinomios en dos variables con coeficientes en $\mathbb{F}$. Para cada $d \geq 0$, sea V_d el subespacio de $\mathbb{F}[X, Y]$ de polinomios homogéneos de grado d. El espacio V_0 es el espacio unidimensional de los polinomios constantes, para $d \geq 1$, el espacio V_d tiene como base los monomios $X^d, X^{d-1}Y, \cdots, XY^{d-1}, Y^d$ y $\dim V = d + 1$.

V_d es un $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{F})$-módulo con el siguiente homomorfismo de álgebras de Lie
$\pi : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{F}) \to \mathfrak{gl}(V_d)$

$$\pi(E) = X\frac{\partial}{\partial Y}; \quad \pi(F) = Y\frac{\partial}{\partial X}; \quad \pi(H) = X\frac{\partial}{\partial X} - Y\frac{\partial}{\partial Y}$$

Notar que

$$\pi(H)(X^a Y^b) = (a - b)X^a Y^b$$

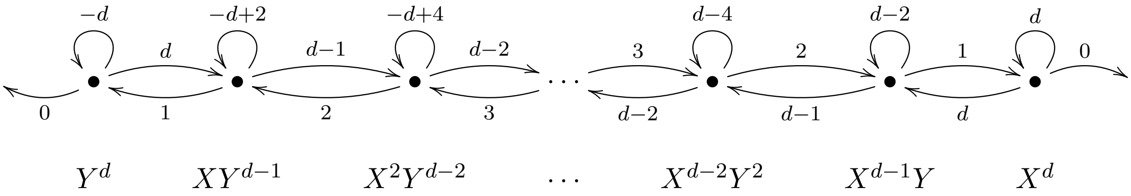
Por lo tanto los autovalores H son $\{d - 2k : k = 0, \cdots, d\}$ con $d - 2k$ asociado al autovector $X^{d-k}Y^k$; todos los autoespacios son de dimensión 1. Es decir

$$V_d = \bigoplus_{k=0}^{d} < X^{d-k}Y^k > .$$

Las matrices $\pi(E), \pi(F), \pi(H)$ con respecto a la base introducida son respectivamente

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & d \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ d & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & d-1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} d & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & d-2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -d+2 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -d \end{pmatrix}$$

Un modo de representar la acción de H, E, F es a través del siguiente diagrama



donde los rulos representan la acción de H, las flechas de la derecha representan la acción de E, y las flechas de la izquierda representan la acción de F.

Theorem 3.2.1. *El $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{F})$-módulo V_d es irreducible.*

Demostración. Sea W un submódulo no nulo del $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{F})$ módulo V_d, entonces $H.w \in W$ para todo $w \in W$. Como h actúa diagonalmente en V_d entonces actúa diagonalmente en W, y existe un autovector de H que pertenece a W. Así W de contener algún monomio $X^{d-k}Y^k$. De acuerdo a lo observado en el diagrama $W = V_d$. $\square$

Se probará que todo $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{F})$-módulo irreducible es isomorfo a V_d para algún $d \geq 0$. En lo que sigue, frecuentemente usaremos la notación de módulo, omitiendo el homomorfismo π.

Lemma 3.2.2. *Supongamos que V es una representación de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{F})$ y sea v un autovector de H con autovalor λ. Entonces*

(a) $E \cdot v = 0$ o $E.v$ es un autovector de H asociado al autovalor $\lambda + 2$.

(b) $F \cdot v = 0$ o $F.v$ es un autovector de H asociado al autovalor $\lambda - 2$.

Demostración. Tenemos

$$H \cdot (E \cdot v) = E \cdot (H \cdot v) + [H, E] \cdot v = E \cdot (\lambda v) + 2E \cdot v.$$

El cálculo para $F \cdot v$ es similar. $\square$

Lemma 3.2.3. *Sea V un $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{F})$-módulo, entonces V contiene un autovector w para H tal que $E \cdot w = 0$.*

Demostración. Como $\mathbb{F}$ es un cuerpo algebraicamente cerrado, $H : V \to V$ tiene al menos un autovalor, λ, sea v un autovector asociado a λ. Debido a que $[H, E] = 2E$ resulta que $[\pi(H), \pi(E)^k] = 2k\pi(E)$ y por lo tanto $\pi(E)$ es nilpotente. Por lo tanto existe $k \geq 0$ tal que $E^k \cdot v \neq 0$ y $E^{k+1} \cdot v = 0$ entonces $w = E^k \cdot v$ es tal que $h \cdot w = (\lambda + 2k)w$ y $E \cdot w = 0$.

Theorem 3.2.4. *Si V es un $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{F})$-módulo de dimensión finita irreducible, entonces V es isomorfo a V_d para algún d.*

Demostración. Por el Lema 3.2.2 existe w autovector de H tal que $h \cdot w = \lambda w$ y $E \cdot w = 0$ y existe un $d \geq 0$ tal que $F^d \cdot w \neq 0$ y $F^{d+1} \cdot w = 0$.

Los vectores $w, F \cdot w, \cdots F^d \cdot w$ forman una base para un submódulo de V que es invariante por H y F, para mostrar la invariancia por E se prueba por inducción en k que

$$E \cdot (F^k \cdot w) \in < \{F^j \cdot w : 0 \leq j < k\} >$$

Como V es irreducible, el submódulo generado por $F^j \cdot w$ para $0 \leq j \leq d$ es V.

Para probar que $\lambda = d$ observar que la matriz de H con respecto a la base $w, F\cdot w, \cdots, F^d\cdot w$ de V es diagonal, con traza $(d+1)(\lambda - d)$. Como $[E,F] = H$ la matriz de H tiene traza cero entonces $\lambda = d$.

Finalmente, sea $\psi : V \to V_d$ definida del siguiente modo

$$\psi(w) = X^d \qquad\qquad \psi(F^k\cdot w) = F^k\cdot X^d$$

Se verifica que ψ es un isomorfismo. $\square$

Corollary 3.2.5. *Si V es una representación de dimensión finita de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{F})$ y $w \in V$ es un autovector de H tal que $E\cdot w = 0$, entonces $H\cdot w = dw$ para algún entero no negativo d y el submódulo de V generado por w es isomorfo a V_d.*

Definición 3.2.6. A los v un autovector de H tal que $E\cdot v = 0$ se los denomina vector de peso máximo. Si d (entero no negativo) es el autovalor asociado v en H entonces d se denomina peso máximo. Sea $V_\lambda = \{v \in V : H\cdot v = \lambda v\}$ el autoespacio asociado al autovalor λ este denomina peso de H en V y V_λ espacio peso.

Resumiendo lo ante expuesto tenemos el siguiente teorema y corolario.

Theorem 3.2.7. *Sea V un módulo irreducible para $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{F})$ con $\dim V = n+1$.*

(a) Con respecto a H, V es suma directa de los espacios pesos V_λ, $\lambda = n, n-2, \cdots, -(n-2), -n$, y $\dim V_\lambda = 1$ para cada λ.

(b) V tiene (salvo múltiplo escalar no nulo) un único vector maximal, cuyo peso máximo es n.

(c) La acción de $\mathfrak{g}$ en V está dada por: Sea v_0 un vector maximal; sea $v_{-1} = 0 \in V_\lambda$, y $v_i = (\frac{1}{i!})F^i\cdot v_0 (i \geq 0)$.

(a) $H\cdot v_i = (\lambda - 2i)v_i$,

(b) $F\cdot v_i = (i+1)v_{i+1}$,

(c) $E\cdot v_i = (\lambda - i + 1)v_{i-1}$ con $(i \geq 0)$.

Para demostrar el siguiente corolario se utilizará el teorema de Weyl ver [3] sección 6.3.

Corollary 3.2.8. *Sea V un $\mathfrak{g}$-módulo de dimensión finita, $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{F})$. Entonces los autovalores de H en V son todos enteros, cada uno ocurre con su negativo (con igual número de veces). Además, en toda descomposición de V en suma directa de submódulo irreducibles, el número de sumandos es precisamente $\dim V_0 + \dim V_1$.*

Demostración. Si $V = 0$, no hay nada que probar. Por el teorema de Weyl, se puede descomponer V como suma directa de submódulos irreducibles. Éstos son descriptos por el teorema, por ello la primera afirmación del corolario es obvia.

Para la segunda afirmación, observar que cada submódulo irreducible tiene como autovalor de H en V el 0 o el 1 (pero no a ambos). $\square$

Proposition 3.2.9. *Sea V una representación finita de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, a_r la multiplicidad de r como autovalor de H en la representación V y $\alpha_i(V)$ la cantidad de veces que aparece V_i en la descomposición de irreducibles en V entonces $\alpha_r(V) = a_r - a_{r+2}$.*

Demostración. Sean π una representación de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ y $V \simeq \alpha_0 V_0 \oplus \alpha_1 V_1 \oplus \cdots \oplus \alpha_k V_k$ con V_i representación irreducible con peso máximo i entonces el operador $\pi|_{\mathfrak{b}}$ se descompone del siguiente modo

$$\pi = \alpha_0\pi_0 \oplus \alpha_1\pi_1 \oplus \cdots \oplus \alpha_k\pi_k \text{ donde } \pi_i : \mathfrak{b} \to gl(V_i)$$

$\pi(H)$ es diagonalizable. r es un autovalor de $\pi(H)$ si y sólo si existe $r \leq j \leq k$ con $\alpha_j \neq 0$. Más aún,

$$a_r = \sum_{s \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \alpha_{r+2s}$$

Por lo tanto $\alpha_r = a_r - a_{r+2}$. $\square$

Example 3.2.10. Sea π_7 y π_5 representaciones irreducible de $\mathfrak{sl}(2,k)$ en V_7 y V_5 respectivamente. Queremos encontrar las componentes irreducibles del producto tensorial $V_7 \otimes V_5$ bajo la acción de $\mathfrak{sl}(2,k)$. Escribimos las bases canónicas de cada irreducible:

$$\text{base de } V_7 = \{v_7, v_5, v_3, v_1, v_{-1}, v_{-3}, v_5, v_{-7}\}$$

$$\text{base de } V_5 = \{w_5, w_3, w_1, w_{-1}, w_{-3}, w_5\}$$

Recordemos cómo son las matrices respecto de las bases canónicas

$$\pi_7(E) = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 3 & 0 & 0 \\ & & & & & 0 & 2 & 0 \\ & & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix}, \pi_7(F) = \begin{pmatrix} 0 & & & & & & & \\ 1 & 0 & & & & & & \\ 0 & 2 & 0 & & & & & \\ 0 & 0 & 3 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\pi_5(E) = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 3 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 2 & 0 \\ & & & & 0 & 1 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}, \pi_5(F) = \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ 1 & 0 & & & & \\ 0 & 2 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 3 & 0 & & \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Los vectores del producto tensorial que están en el núcleo de $(\pi_7 \otimes \pi_5)(X)$ y son vectores propios de $(\pi_7 \otimes \pi_5)(H)$ se muestra a continuación. De peso $\mu = 12$; $u_1 = v_7 \otimes w_5$.

$$\begin{aligned} (\pi_7 \otimes \pi_5)(X)(u_1) &= \pi_7(X)(v_7) \otimes w_5 + \pi_5(X)(w_5) = 0, \\ (\pi_7 \otimes \pi_5)(H)(u_1) &= \pi_7(H)(v_7) \otimes w_5 + \pi_5(H)(w_5) = 12 v_7 \otimes w_5. \end{aligned}$$

De peso $\mu = 10$: $u_2 = v_7 \otimes w_3 - \frac{5}{7} v_5 \otimes w_5$.

$$\begin{aligned} (\pi_7 \otimes \pi_5)(X)(u_2) &= v_7 \otimes 5w_5 - \frac{5}{7} 7 v_7 \otimes w_5 = 0, \\ (\pi_7 \otimes \pi_5)(H)(u_2) &= 10 v_7 \otimes w_3 - \frac{5}{7} 10 v_5 \otimes w_5 \end{aligned}$$

De peso $\mu = 8$: $u_3 = v_7 \otimes w_1 - \frac{4}{7} v_5 \otimes w_3 + \frac{10}{21} v_3 \otimes w_5$.

$$\begin{aligned} (\pi_7 \otimes \pi_5)(X)(u_3) &= v_7 \otimes 4w_3 - \frac{4}{7} v_7 \otimes w_3 + \frac{-4}{7} v_5 \otimes 5w_5 + \frac{10}{21} 6 v_5 \otimes w_5 \\ &= 0 \\ (\pi_7 \otimes \pi_5)(H)(u_2) &= 8 v_7 \otimes w_1 - \frac{4}{7} 8 v_5 \otimes w_3 + \frac{10}{21} 8 v_3 \otimes w_5. \end{aligned}$$

Para los siguientes vectores pesos omitiremos mostrar la acción de H De peso $\mu = 6$: $u_4 = v_7 \otimes w_{-1} - \frac{3}{7} v_5 \otimes w_1 + \frac{2}{7} v_3 \otimes w_3 - \frac{2}{7} v_1 \otimes w_5$.

$$\begin{aligned}(\pi_7 \otimes \pi_5)(X)(u_4) &= 3v_7 \otimes 4w_1 - \frac{3}{7}7v_7 \otimes w_1 - \frac{3}{7}4v_5 \otimes 5w_3 + \\ &\quad + \frac{2}{7}6v_5 \otimes w_3 + \frac{2}{7}v_3 \otimes 5w_5 - \frac{2}{7}5v_3 \otimes 5w_5 \\ &= 0.\end{aligned}$$

De peso $\mu = 4$: $u_5 = v_7 \otimes w_{-3} - \frac{2}{7} v_5 \otimes w_{-1} + \frac{1}{7} v_3 \otimes w_1 - \frac{4}{35} v_1 \otimes w_3 + \frac{1}{7} v_{-1} \otimes w_5$.

$$\begin{aligned}(\pi_7 \otimes \pi_5)(X)(u_5) &= v_7 \otimes 2w_{-1} - \frac{2}{7}7v_7 \otimes w_{-1} - \frac{2}{7}v_5 \otimes 3w_1 + \frac{1}{7}6v_5 \otimes 3w_1 + \\ &\quad + \frac{1}{7}v_3 \otimes w_3 - \frac{4}{35}5v_3 \otimes w_3 - \frac{4}{35}v_1 \otimes 5w_3 - \frac{1}{7}4v_1 \otimes w_5 + \\ &= 0.\end{aligned}$$

De peso $\mu = 2$: $u_6 = v_7 \otimes w_{-5} - \frac{1}{7} v_5 \otimes w_{-3} + \frac{1}{7} v_3 \otimes w_{-1} - \frac{1}{35} v_1 \otimes w_1 + \frac{1}{35} v_{-1} \otimes w_3 - \frac{1}{21} v_{-3} \otimes w_5$.

$$\begin{aligned}(\pi_7 \otimes \pi_5)(X)(u_6) &= v_7 \otimes w_{-3} - \frac{1}{7}7v_7 \otimes w_{-3} - \frac{1}{7}v_5 \otimes 2w_{-1} + \frac{1}{21}6v_5 \otimes 3w_{-1} + \\ &\quad + \frac{1}{21}v_3 \otimes 3w_1 - \frac{1}{35}5v_3 \otimes w_1 - \frac{1}{35}v_1 \otimes 4w_3 - \frac{1}{35}4v_1 \otimes w_3 + \\ &\quad + \frac{1}{35}v_{-1} \otimes 5w_5 - \frac{1}{21}3v_{-1} \otimes w_5 \\ &= 0.\end{aligned}$$

En consecuencia $V_{(7)} \otimes V_{(5)}$ se descompone en la siguiente suma directa de subespacios irreducibles:

$$V_{(12)} \oplus V_{(10)} \oplus V_{(8)} \oplus V_{(6)} \oplus V_{(4)} \oplus V_{(2)}.$$

3.3. Las álgebras de Lie $\mathfrak{b}_n$

Sea $\mathfrak{b}$ la subálgebra de Borel de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ ver Ejemplo 2.2.11 en donde está definida esta subálgebra.

Sabemos que $\mathfrak{b}$ es isomorfa a la única álgebra de Lie soluble de dimensión 2 cuya estructura esta dada por $[H,E] = 2E$ y sea V_n una representación irreducible de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ con $n \geq 0$; entonces V_n restringida a $\mathfrak{b}$ es una representación de $\mathfrak{b}$.

Sea $\mathfrak{b}_n = \mathfrak{b} \ltimes V_n$.

Identificamos $(x, 0)$ con x si $x \in \mathfrak{b}$, $(0, v)$ con v si $v \in V_n$, en b_n tenemos el siguiente corchete

$$[H,E] = 2E, \qquad [v,w] = 0 \qquad [\alpha H + \beta E, v] = \alpha\pi(H)v + \beta\pi(E)v.$$

- $\dim b_n = n + 3$.
- Si $n \neq 0$ $\mathfrak{b}_n$ es un álgebra de Lie 3 pasos soluble. La serie derivada es la siguiente :

  $\mathfrak{b}_n^{(0)} = \mathfrak{b}_n$.

  $\mathfrak{b}_n^{(1)} = [\mathfrak{b}_n, \mathfrak{b}_n]$ es el espacio vectorial generado por $\{E, e_{n-2k} : k = 0, \ldots, n\}$ ya que $[H,E] = 2E$ y $\pi_n(H)e_{n-2k} = (n-2k)e_{n-2k}$ con k=0,. . . ,n.

$\mathfrak{b}_n^{(2)} = [\mathfrak{b}_n^{(1)}, \mathfrak{b}_n^{(1)}]$ es el espacio generado por $\{e_{n-2k} : k = 0, \ldots, n-1\}$ pues $Ee_{n-2k} = (n+1-k)e_{n-2k+2}$ con la convención de que $e_{n+2} = 0$.

Como $\mathfrak{b}_n^{(2)} \subset V_n$ entonces $[\mathfrak{b}_n^{(2)}, \mathfrak{b}_n^{(2)}] = 0$.

Si $n = 0$ es 2- pasos solubles pues $\mathfrak{b}_n^{(1)} = [\mathfrak{b}_n, \mathfrak{b}_n]$ es el espacio vectorial generado por $\{E\}$ y $\mathfrak{b}_n^{(2)} = 0$

- $\mathfrak{b}_n$ no es nilpotente. La serie central descendente es la siguiente :
  $\mathfrak{b}_n^0 = \mathfrak{b}_n$.
  $\mathfrak{b}_n^1 = [\mathfrak{b}_n, \mathfrak{b}_n]$ es el espacio vectorial generado por $\{E, e_{n-2k} : k = 0, \ldots, n\}$.
  $\mathfrak{b}_n^2 = [\mathfrak{b}_n, \mathfrak{b}_n^1]$, es el espacio vectorial generado por $\{E, e_{n-2k} : k = 0, \ldots, n\}$ ya que $[H, \mathfrak{b}_n^1] \supset \mathfrak{b}_n^1$.
  En consecuencia $\mathfrak{b}_n^k = [\mathfrak{b}_n, \mathfrak{b}_n^{k-1}]$ es el espacio vectorial generado por $\{E, e_{n-2k} : k = 0, \ldots, n\}$ para todo k.

- El centro de $\mathfrak{b}_n$ es cero pues si $z = \beta_1 H + \beta_2 + \sum_{k=0}^n \alpha_k e_{n-2k} \in \mathfrak{z}(\mathfrak{b}_n)$ entonces se debe verifica

$$0 = [z, H] = 2\beta_2 E + \sum_{k=0}^{n} (n-2k)\alpha_k e_{n-2k}.$$

El conjunto $\{E, e_{n-2k} : k = 0, \ldots, n\}$ es linealmente independiente por lo tanto

$$\beta_2 = 0, \qquad (n-2k)\alpha_k = 0 \text{ para todo } k = 0, \ldots, n.$$

Si n es impar $\alpha_k = 0$ para todo $k = 0, \ldots, n$. En consecuencia $z = \beta_1 H$, pero debe cumplirse $0 = [\beta_1 H, E]$ entonces $\beta_1 = 0$. Por lo tanto $\mathfrak{z}(\mathfrak{b}_n) = 0$.

Si n es par $\alpha_k = 0$ para todo $k \neq \frac{n}{2}$. En consecuencia $z = \beta_1 H + \alpha_{\frac{n}{2}} e_0$, pero debe cumplirse

$$0 = [\beta_1 H + \alpha_{\frac{n}{2}} e_0, E] = 2\beta_1 E + (\frac{n}{2} + 1)\alpha_{\frac{n}{2}} e_2$$

Entonces $\beta_1 = 0$ y $\alpha_{\frac{n}{2}} = 0$. Por lo tanto $\mathfrak{z}(\mathfrak{b}_n) = 0$.

Capítulo 4

Homología de álgebras de Lie

En este capítulo se define la homología de un álgebra de Lie con coeficientes en una representación del álgebra. Se encuentra la homología con coeficientes de algunas álgebras clásica, en particular la homología de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ con coeficientes en una representación irreducible arbitraria. Los apectos teóricos del tema pueden encontrarse en [6].

Definition 4.0.1. Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie de dimensión n y sea $\pi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ una representación de $\mathfrak{g}$. Definimos el siguiente complejo

$$0 \to \bigwedge^{n} \mathfrak{g} \otimes V \xrightarrow{\partial_n} \bigwedge^{n-1} \mathfrak{g} \otimes V \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_3} \bigwedge^{2} \mathfrak{g} \otimes V \xrightarrow{\partial_2} \mathfrak{g} \otimes V \xrightarrow{\partial_1} V \longrightarrow 0$$

donde $\partial_k : \bigwedge^k \mathfrak{g} \otimes V \to \bigwedge^{k-1} \mathfrak{g} \otimes V$ está definida por

$$\partial_k(x_1 \wedge \ldots \wedge x_k \otimes v) = \sum_{i<j} (-1)^{i+j+1} [x_i, x_j] \wedge x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge \widehat{x_i} \wedge \ldots \widehat{x_j} \wedge \ldots \wedge x_k \otimes v$$
$$+ \sum_{j} (-1)^{j+1} x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge \widehat{x_j} \wedge \ldots \wedge x_k \otimes \pi(x_j)(v).$$

Se demuestra que para todo k

$$\partial_k \circ \partial_{k+1}(\bigwedge^{k} \mathfrak{g} \otimes V) = 0$$

entonces $\partial_{k+1}(\bigwedge^k \mathfrak{g} \otimes V) = \operatorname{Im}(\partial_{k+1}) \subseteq \operatorname{Nu} \partial_k$ y por lo tanto tiene sentido definir la homología de $\mathfrak{g}$ con coeficientes en V como

$$H_i(\mathfrak{g}, V) = \operatorname{Nu}(\partial_i)/\operatorname{Im}(\partial_{i+1})$$

y la homología total como

$$H_*(\mathfrak{g}, V) = \bigoplus_i H_i(\mathfrak{g}, V).$$

Observar que si $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie abeliana de dimensión n entonces $\partial^k = 0$ para todo $0 \le k \le n$. Por lo tanto $\operatorname{Nu}\partial^k = \bigwedge^k(\mathfrak{g})$, $\operatorname{Im} \partial^k = 0$ y

$$\dim H_k = \binom{n}{k} \text{ para todo } k = 0 \cdots n, \qquad \dim H_*(\mathfrak{g}) = 2^n.$$

Obsevación: Esta observación es útil para la demostración de la siguiente proposición.

Sean $T_1 : V_1 \to W_1$ y $T_2 : V_2 \to W_2$ transformaciones lineales se define $T_1 \oplus T_2 : V_1 \oplus V_2 \to W_1 \oplus W_2$, con $T_1 \oplus T_2(v_1, v_2) = (T_1 v_1, T_2 v_2)$.

Se verifica que

$$\operatorname{Nu}(T_1 \oplus T_2) = \operatorname{Nu} T_1 \oplus \operatorname{Nu} T_2 \quad e \quad \operatorname{im}(T_1 \oplus T_2) = \operatorname{im} T_1 \oplus \operatorname{im} T_2$$

Proposition 4.0.2. *Sean V_1, V_2 representaciones de $\mathfrak{g}$, $V = V_1 \oplus V_2$ y $\pi = \pi_1 \oplus \pi_2$ entonces*

$$H_k(\mathfrak{g}, V) \simeq H_k(\mathfrak{g}, V_1) \oplus H_k(\mathfrak{g}, V_2)$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
\partial_k(x_1 \wedge \ldots \wedge x_k \otimes (v_1, v_2)) &= \sum_{i<j} (-1)^{i+j+1}[x_i, x_j] \wedge x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge \widehat{x_i} \wedge \ldots \widehat{x_j} \wedge \ldots \wedge x_k \otimes (v_1, v_2) \\
&\quad + \sum_j (-1)^{j+1} x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge \widehat{x_j} \wedge \ldots \wedge x_k \otimes \pi_1 \oplus \pi_2(x_j)(v_1, v_2) \\
&= \Bigg(\sum_{i<j} (-1)^{i+j+1}[x_i, x_j] \wedge x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge \widehat{x_i} \wedge \ldots \widehat{x_j} \wedge \ldots \wedge x_k \otimes v_1 + \\
&\qquad \sum_j (-1)^{j+1} x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge \widehat{x_j} \wedge \ldots \wedge x_k \otimes \pi_1 v_1, \\
&\qquad \sum_{i<j} (-1)^{i+j+1}[x_i, x_j] \wedge x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge \widehat{x_i} \wedge \ldots \widehat{x_j} \wedge \ldots \wedge x_k \otimes v_2 + \\
&\qquad \sum_j (-1)^{j+1} x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge \widehat{x_j} \wedge \ldots \wedge x_k \otimes \pi_2 v_2 \Bigg) \\
&= \big(\partial_k^1(x_1 \wedge \ldots \wedge x_k \otimes v_1), \partial_k^2(x_1 \wedge \ldots \wedge x_k \otimes v_2)\big) = \partial_k^1 \oplus \partial_k^2(x_1 \wedge \ldots \wedge x_k \otimes (v_1, v_2))
\end{aligned}$$

donde $\partial_k^1, \partial_k^2$ son los operadores diferenciales k-ésimo asociado a las representaciones π_1, π_2 respectivamente. Se usó la propiedad $x \otimes (v_1, v_2) = (x \otimes v_1, x \otimes v_2)$. Por lo tanto $\partial_k = \partial_k^1 \oplus \partial_k^2$.

$$H_k(\mathfrak{g}, V) = \frac{\operatorname{Nu} \partial_k}{\operatorname{im} \partial_{k+1}} = \frac{\operatorname{Nu} \partial_k^1 \oplus \operatorname{Nu} \partial_k^2}{\operatorname{im} \partial_{k+1}^1 \oplus \operatorname{im} \partial_{k+1}^2} \simeq \frac{\operatorname{Nu} \partial_k^1}{\operatorname{im} \partial_{k+1}^1} \oplus \frac{\operatorname{Nu} \partial_k^2}{\operatorname{im} \partial_{k+1}^2} = H_k(\mathfrak{g}, V_1) \oplus H_k(\mathfrak{g}, V_2)$$

Se usó la Observación 4 y el siguiente resultado

Si V_1, V_2 son espacios vectoriales y W_1, W_2 subespacios de V_1, V_2 respectivamente entonces

$$\frac{V_1 \oplus V_2}{W_1 \oplus W_2} \simeq \frac{V_1}{W_1} \oplus \frac{V_2}{W_2}$$

□

A continuación desarrollaremos algunos ejemplos en los que calcularemos la homología de algunas álgebras de Lie de dimensión pequeña.

4.1. Matrices triangulares superiores 2×2, coeficientes naturales

Sea $\mathfrak{t}(2,\mathbb{C})$ el álgebra de matrices 2×2 triangulares superiores y sea $\mathbb{C}^2$ la representación natural de $\mathfrak{t}(2,\mathbb{C})$. Una base de $\mathfrak{t}(2,\mathbb{C})$ es $\mathcal{B} = \{e_{i,j} : i \leq j\}$, donde $e_{i,j}$ es la matriz 2×2 cuya entrada (i,j) vale 1 y 0 en los otros casos.

El complejo asociado es

$$0 \to \bigwedge^3 \mathfrak{t}(2,\mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}^2 \overset{\partial_3}{\to} \bigwedge^2 \mathfrak{t}(2,\mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}^2 \overset{\partial_2}{\to} \mathfrak{t}(2,\mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}^2 \overset{\partial_1}{\to} \mathbb{C} \otimes \mathbb{C}^2 \to 0$$

Núcleo e imagen de ∂_1: Consideramos las bases

$\mathcal{B}_0 = \{(1,0), (0,1)\}$

$\mathcal{B}_1 = \{e_{11} \otimes (1,0), e_{12} \otimes (1,0), e_{22} \otimes (1,0), e_{11} \otimes (0,1), e_{12} \otimes (0,1), e_{22} \otimes (0,1)\}$

de $\mathbb{C}\otimes\mathbb{C}^2$ y $\mathfrak{t}(2,\mathbb{C})\otimes\mathbb{C}^2$ respectivamente. Además

$$\begin{array}{lllllllll}\partial_1(e_{11}\otimes(1,0)) & = & (1,0), & \partial_1(e_{12}\otimes(1,0)) & = & (0,0), & \partial_1(e_{22}\otimes(1,0)) & = & (0,0),\\ \partial_1(e_{11}\otimes(0,1)) & = & (0,0), & \partial_1(e_{12}\otimes(0,1)) & = & (1,0), & \partial_1(e_{22}\otimes(0,1)) & = & (0,1).\end{array}$$

y por lo tanto la matriz de ∂_1 con respecto a las bases $\mathcal{B}_0$ y $\mathcal{B}_1$ es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

y obtenemos

$$\dim \mathrm{Nu}\partial_1 = 4 \text{ y } \dim \mathrm{Im}\partial_1 = 2.$$

Núcleo e imagen de ∂_2: Una base de $\bigwedge^2(\mathfrak{t}(2,\mathbb{C}))\otimes\mathbb{C}^2$ es:

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_2 = \{&e_{11}\wedge e_{12}\otimes(1,0), e_{11}\wedge e_{22}\otimes(1,0), e_{12}\wedge e_{22}\otimes(1,0),\\ &e_{11}\wedge e_{12}\otimes(0,1), e_{11}\wedge e_{22}\otimes(0,1), e_{12}\wedge e_{22}\otimes(0,1)\},\end{aligned}$$

la matriz de ∂_2 es

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

y por lo tanto

$$\dim \mathrm{Nu}\partial_2 = 2 \text{ y } \dim \mathrm{Im}\partial_2 = 4.$$

Núcleo e imagen de ∂_3: Una base de $\bigwedge^3(\mathfrak{t}(2,\mathbb{C}))$ es:

$$\mathcal{B}_3 = \{e_{11}\wedge e_{12}\wedge e_{22}\otimes(1,0), e_{11}\wedge e_{12}\wedge e_{22}\otimes(0,1)\},$$

la matriz de ∂_3 es

$$\begin{pmatrix} -1 & 0\\ 0 & -1\\ 2 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

y obtenemos

$$\dim \mathrm{Nu}\partial_3 = 0 \text{ y } \dim \mathrm{Im}\partial_3 = 2.$$

De este modo las dimensiones de los grupos de homología son

$$\dim H_0 = \dim H_1 = \dim H_2 = \dim H_3 = 0.$$

4.2. $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, coeficientes representación adjunta

Sea $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ el álgebra de matrices 2×2 de traza nula y sea ad la representación adjunta de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$.

El complejo asociado es

$$0 \to \bigwedge^3 \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})\otimes\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \stackrel{\partial_3}{\to} \bigwedge^2 \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})\otimes\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \stackrel{\partial_2}{\to} \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})\otimes\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \stackrel{\partial_1}{\to} \mathbb{C}\otimes\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \to 0$$

Núcleo e imagen de ∂_1: Consideremos las bases

$$\mathcal{B}_0 = \{H, E, F\}$$
$$\mathcal{B}_1 = \{H\otimes H, H\otimes E, H\otimes F, E\otimes H, E\otimes E, E\otimes F, F\otimes H, F\otimes E, F\otimes F\}$$

de $\mathbb{C}\otimes\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ y $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})\otimes\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ respectivamente. Además

$$\begin{array}{rclrclrcl}
\partial_1(H\otimes H) &=& 0, & \partial_1(H\otimes E) &=& 2E, & \partial_1(H\otimes F) &=& -2F,\\
\partial_1(E\otimes H) &=& -2E, & \partial_1(E\otimes E) &=& 0, & \partial_1(E\otimes F) &=& H,\\
\partial_1(F\otimes H) &=& 2F, & \partial_1(F\otimes E) &=& -H, & \partial_1(F\otimes F) &=& 0.
\end{array}$$

y por lo tanto la matriz ∂_1 con respecto a las bases $\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1$ es

$$\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0\\
0 & 2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0
\end{bmatrix},$$

y obtenemos

$$\dim \mathrm{Nu}\partial_1 = 6 \text{ y } \dim \mathrm{Im}\partial_1 = 3.$$

Núcleo e imagen de ∂_2: Una base de $\bigwedge^2(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}))\otimes\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ es

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_2 = \{&H\wedge E\otimes H, H\wedge E\otimes E, H\wedge E\otimes F, H\wedge F\otimes H, H\wedge F\otimes E,\\ &H\wedge F\otimes F, E\wedge F\otimes H, E\wedge F\otimes E, E\wedge F\otimes F\},\end{aligned}$$

la matriz de ∂_2 es

$$\begin{bmatrix}
0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\
2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\
2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}$$

y por lo tanto

$$\dim \mathrm{Nu}\partial_2 = 3 \text{ y } \dim \mathrm{Im}\partial_2 = 6$$

Núcleo e imagen de ∂_3: Una base de $\bigwedge^3(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}))\otimes\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ es

$$\mathcal{B}_3=\{H\wedge E\wedge F\otimes H, H\wedge E\wedge F\otimes E, H\wedge E\wedge F\otimes F\},$$

La matriz de ∂_3 es

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

y obtenemos

$$\dim \operatorname{Nu}\partial_3 = 0 \text{ y } \dim\ \operatorname{Im}\ \partial_3 = 3.$$

De este modo las dimensiones de los grupos de homología son

$$\dim H_0=\dim H_1=\dim H_2=0.$$

4.3. $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, coeficientes representación irreducible

Sea $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ el álgebra de matrices 2×2 de traza nula y sea V_n una representación irreducible de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ de dimensión $n+1$ y de peso máximo n

Se resuelve la homología del siguiente complejo

$$0\to\bigwedge^3\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})\otimes V_n\overset{\partial_3}{\to}\bigwedge^2\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})\otimes V_n\overset{\partial_2}{\to}\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})\otimes V_n\overset{\partial_1}{\to}\mathbb{C}\otimes V_n\to 0$$

Caso n=0

En este caso la representación es la trivial, entonces $\partial_1=0$.

Núcleo e imagen de ∂_2: Sea $e_0\in V_0$ autovector asociado al autovalor 0.

Consideremos las bases

$$\mathcal{B}_1=\{H\otimes e_0, E\otimes e_0, F\otimes e_0\} \text{ y } \mathcal{B}_2=\{H\wedge E\otimes e_0, H\wedge F\otimes e_0, E\wedge F\otimes e_0\}$$

de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})\otimes V_0$ y $\bigwedge^2\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})\otimes V_0$ respectivamente. Además

$$\partial_2(H\wedge E\otimes e_0)=2E\otimes e_0,\ \partial_2(H\wedge F\otimes e_0)=-2F\otimes e_0,\ \partial_2(E\wedge F\otimes e_0)=H\otimes e_0,$$

la matriz de ∂_2 es

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

y por lo tanto

$$\dim \operatorname{Nu}\partial_2 = 0 \text{ y } \dim \operatorname{Im}\partial_2 = 3.$$

Núcleo e imagen de ∂_3: Una base de $\bigwedge^3 \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \otimes V_0$ es $\mathcal{B}_3 = \{H \wedge E \wedge F \otimes e_0\}$. Además $\partial_3 = 0$ y obtenemos

$$\mathrm{Nu}\,\partial_3 = 1 \text{ y } \dim \mathrm{Im}\partial_2 = 0.$$

De este modo las dimensiones de los grupos de homología son

$$\dim H_0 = 1, \dim H_1 = \dim H_2 = \dim H_3 = 0.$$

Caso $n \neq 0$ *Núcleo e imagen de ∂_1*: Consideremos las bases

$$\begin{aligned}
&\mathcal{B}_0 = \{e_{n-2k} : k = 0, \dots n\} \\
&\mathcal{B}_1 = \{H \otimes e_{n-2k}, E \otimes e_{n-2k}, F \otimes e_{n-2k} : k = 0 \dots n\}
\end{aligned}$$

de $\mathbb{C} \otimes V_n$ y $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) \otimes V_n$ respectivamente. Además tomando la convención $e_{n+2} = 0$ y $e_{-n-2} = 0$ tenemos

$$\begin{aligned}
\partial_1(H \otimes e_{n-2k}) &= (n-2k)e_{n-2k}. \\
\partial_1(E \otimes e_{n-2k}) &= (n+1-k)e_{n-2k+2}. \\
\partial_1(F \otimes e_{n-2k}) &= (k+1)e_{n-2k-2}.
\end{aligned}$$

y por lo tanto la matriz de ∂_1 con respecto a las bases $\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1$ es

$$\left[\begin{array}{ccccc|ccccc|ccccc}
n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & n-2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -n+2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n & 0
\end{array}\right]$$

Como el conjunto $\{(n+1-k)e_{n-2k+2} : k = 1 \dots n\} \cup ne_{-n}$ contenido en el espacio columna de la matriz de ∂_1 es linealmente independiente, y rango fila igual a rango columna obtenemos

$$\dim \mathrm{Nu}\partial_1 = 2(n+1) \text{ y } \dim \mathrm{Im}\partial_1 = n+1.$$

Núcleo e imagen de ∂_2: Una base de $\bigwedge^2(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})) \otimes V_n$ es

$$\mathcal{B}_3 = \{H \wedge E \otimes e_{n-2k}, H \wedge F \otimes e_{n-2k}, E \wedge F \otimes e_{n-2k} : k = 0, \dots n\},$$

Además

$$\begin{aligned}
\partial_2(H \wedge E \otimes e_{n-2k}) &= (n-2k+2)E \otimes e_{n-2k} - (n+1-k)H \otimes e_{n-2k+2} \\
\partial_2(H \wedge F \otimes e_{n-2k}) &= (n-2k-2)F \otimes e_{n-2k} - (k+1)H \otimes e_{n-2k-2} \\
\partial_2(E \wedge F \otimes e_{n-2k}) &= H \otimes e_{n-2k} + (n+1-k)F \otimes e_{n-2k+2} - (k+1)E \otimes e_{n-2k-2},
\end{aligned}$$

y por lo tanto la matriz de ∂_2 es

$$\left[\begin{array}{ccccc|ccccc|ccccc}
0 & -n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
n+2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -n+4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -n+2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -n & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n-2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n-4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -n-2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]$$

El rango de la matriz de ∂_2 es $2(n+1)$: El conjunto

$$\mathcal{B} = \{(n-2k-2)F \otimes e_{n-2k} - (k+1)H \otimes e_{n-2k-2} : k = 0, \dots, n\} \cup$$
$$\{H \otimes e_{n-2k} + (n+1-k)F \otimes e_{n-2k+2} - (k+1)E \otimes e_{n-2k-2} : k = 0 \dots n-1\} \cup \{(n+2)E \otimes e_n\}$$

es linealmente independiente pues si planteamos

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k((n-2k-2)F \otimes e_{n-2k} - (k+1)H \otimes e_{n-2k-2})+$$
$$\sum_{k=0}^{n-1} \beta_k(H \otimes e_{n-2k} + (n+1-k)F \otimes e_{n-2k+2} - (k+1)E \otimes e_{n-2k-2}) + \gamma(n+2)E \otimes e_n = 0,$$

suponiendo $\beta_{n-1} = \beta_n = 0$ obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}
-k\alpha_{k-1} + \beta_k &= 0 \text{ con } k = 0, \dots, n \\
-(k+1)\beta_k &= 0 \text{ con } k = 0, \dots, n-1 \\
(n-2k-2)\alpha_k + (n-k)\beta_{k+1} &= 0 \text{ con } k = 0, \dots, n-2 \\
(n+2)\gamma &= 0.
\end{aligned}$$

Resolviéndolo obtenemos $\alpha_k = 0$ con $k = 0, \dots, n$, $\beta_k = 0$ con $k = 0 \dots n-1$ y $\gamma = 0$.

Para cada $j \geq 1$ el vector $(n-2j+2)E \otimes e_{n-2j} - (n-j+1)H \otimes e_{n-2j+2}$ es linealmente dependiente con el conjunto de vectores $\mathcal{B}$ ya que si planteamos

$$\beta(n-2j+2)E\otimes e_{n-2j}-(n-j+1)H\otimes e_{n-2j+2}+ \\ \sum_{k=0}^{n}\alpha_k((n-2k-2)F\otimes e_{n-2k}-(k+1)H\otimes e_{n-2k-2})+ \\ \sum_{k=0}^{n-1}\beta_k(H\otimes e_{n-2k}+(n+1-k)F\otimes e_{n-2k+2}-(k+1)E\otimes e_{n-2k-2})+ \\ \gamma(n+2)E\otimes e_n=0$$

suponiendo $\beta_{-1}=\beta_n=\beta_{n+1}=0$ obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones.
Para cada $j=1,\ldots,n$

$$\begin{aligned}
-(n-j+1)\beta-(j-1)\alpha_{j-2}+\beta_{j-1} &= 0 && (4.3.1)\\
-k\alpha_{k-1}+\beta_k &= 0 \text{ con } k=0,1,\ldots,\widehat{j-1},\ldots,n. && (4.3.2)\\
(n-2j+2)\beta-j\beta_{j-1} &= 0 && (4.3.3)\\
-k\beta_{k-1} &= 0 \text{ con } k=1,\ldots,\widehat{j},\ldots,n. && (4.3.4)\\
(n-2k-2)\alpha_k+(n-k)\beta_{k+1} &= 0 \text{ con } k=0,\ldots,n. && (4.3.5)\\
(n+2)\gamma &= 0. && (4.3.6)
\end{aligned}$$

De la ecuación 4.3.4 obtenemos

$$\beta_k=0 \qquad \forall k=1,\ldots,\widehat{j-1},\ldots,n-1.$$

y de 4.3.2

$$\alpha_k=0 \qquad \forall k=0,\ldots,\widehat{j-2},\ldots,n-2 \qquad \text{y } \beta_0=0.$$

Por lo tanto la ecuación 4.3.5 se satisface $\forall k=0,\ldots,\widehat{j-2},\ldots,n$.
En consecuencia nos queda a resolver el siguiente sistema.

$$\begin{aligned}
-(n-j+1)\beta-(j-1)\alpha_{j-2}+\beta_{j-1} &= 0\\
(n-2j+2)\beta-j\beta_{j-1} &= 0\\
(n-2j+2)\alpha_{j-2}+(n-j+2)\beta_{j-1} &= 0
\end{aligned}$$

La siguiente es la matriz asociada a este sistema homogéneo

$$\begin{pmatrix} -(n-j+1) & -(j-1) & 1\\ (n-2j+2) & 0 & -j\\ 0 & (n-2j+2) & (n-j+2) \end{pmatrix}$$

tiene determinante cero entonces el sistema homogéneo admite soluciones no triviales.
Así $\{(n-2j+2)E\otimes e_{n-2j}-(n-j+1)H\otimes e_{n-2j+2}\}\cup\mathcal{B}$ es linealmente dependiente para todo $j=1,\ldots,n$.

$$\dim \mathrm{Nu}\partial_2=n+1 \text{ y} \dim \mathrm{Im}\partial_2=2(n+1).$$

Núcleo e imagen de ∂_3: Una base de $\bigwedge^3(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}))\otimes V_n$ es:

$$\mathcal{B}_3=\{H\wedge E\wedge F\otimes e_{n-2k}:k=0,\ldots n\}.$$

Además

$$\begin{aligned}\partial_3(H \wedge E \wedge F \otimes e_{n-2k}) &= (n-2k)E \wedge F \otimes e_{n-2k} - (n+1-k)H \wedge F \otimes e_{n-2k+2} + \\ &\quad (k+1)H \wedge E \otimes e_{n-2k-2},\end{aligned}$$

la matriz de ∂_3 es

$$\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & n-1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n & 0 \\
0 & -n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -n+1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\
-n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & n-2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & n-4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -n+4 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -n+2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -n
\end{bmatrix}$$

El Núcleo de la matriz de ∂_3 es 0:

Sea $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k H \wedge E \wedge F \otimes e_{n-2k}$ un elemento de $\bigwedge^3(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})) \otimes V_n$.

Para encontrar el núcleo planteamos el siguiente sistema de ecuaciones homogéneo

$$\begin{aligned}0 = \partial_3(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k H \wedge E \wedge F \otimes e_{n-2k}) &= \sum_{k=0}^{n} \alpha_k (k+1) H \wedge E \otimes e_{n-2k-2} \\ &\quad -\alpha_k(n+1-k)H \wedge F \otimes e_{n-2k+2} + \alpha_k(n-2k)E \wedge F \otimes e_{n-2k}\end{aligned}$$

como $\{(k+1)H \wedge E \otimes e_{n-2k-2}, H \wedge F \otimes e_{n-2k+2}, E \wedge F \otimes e_{n-2k} : k = 0, \dots n\}$ es linealmente independiente obtenemos

$$\begin{aligned} \alpha_k(k+1) &= 0 \quad k = 0, \dots, n-1 \\ -\alpha_k(n+1-k) &= 0 \\ \alpha_k(n-2k) &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto $\alpha_k = 0$ para todo $k = 0, \dots n$

$$\dim \mathrm{Nu}\partial_3 = 0 \text{ y } \dim \mathrm{Im}\partial_3 = (n+1)$$

Del cálculo del núcleo e imagen de $\partial_1, \partial_2, \partial_3$ obtenemos lo siguiente referido a las dimensiones de los espacios de homología.

$$\dim H_0 = \dim H_1 = \dim H_2 = \dim H_3 = 0$$

Example 4.3.1. Sean $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie , π una representación de $\mathfrak{g}$ en V, y $\widetilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \ltimes V$; donde $\widetilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \oplus V$ como espacio vectorial y con el siguiente corchete es un álgebra de Lie

$$[(x,v),(y,w)] = ([x,y], \pi(x)(w) - \pi(y)(v)) \qquad x, y \in \mathfrak{g}, v, w \in V$$

Sea $\mathfrak{b}$ la subálgebra de Borel de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, sea $\pi : \mathfrak{b} \to \mathfrak{gl}(V)$ donde $V = \mathbb{C}$, y $\pi(H) = 1$, $\pi(E) = 0$. Sea $\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{b} \ltimes V$, sea $\mathfrak{B} = \{H, E, 1\}$ una base de $\mathfrak{b}_1$, donde el corchete en $\mathfrak{b}_1$ es

$$[H,E] = 2E, \qquad [H,1] = 1, \qquad [E,1] = 0$$

Se resuelve la homología del siguiente complejo

$$0 \to \bigwedge^3 \mathfrak{b}_1 \overset{\partial_3}{\to} \bigwedge^2 \mathfrak{b}_1 \overset{\partial_2}{\to} \mathfrak{b}_1 \overset{\partial_1}{\to} \mathbb{C} \to 0$$

$$\partial_k(x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_k) = \sum_{i<j} (-1)^{i+j+1} [x_i, x_j] \wedge x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge \widehat{x_i} \wedge \dots \widehat{x_j} \wedge \dots x_k, \quad k = 1, 2, 3.$$

Observar que $\partial_0 = \partial_1 = 0$.

Sea $\mathfrak{B}_1 = \{H \wedge E, H \wedge 1, E \wedge 1\}$ base de $\bigwedge^2(\mathfrak{b}_1)$ la matriz asociada al operador $\partial_2 : \bigwedge^2 \mathfrak{b}_0 \to \mathfrak{b}_1$ es la siguiente

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto $\mathrm{Nu}\partial_2 = \langle E \wedge 1 \rangle$, e $\mathrm{Im}\,\partial_2 = \langle E, 1 \rangle$ y $dim \mathrm{Nu}\partial_2 = 1$, $dim\,\mathrm{Im}\,\partial_2 = 2$.

Sea $\mathfrak{B}_2 = \{H \wedge E \wedge 1\}$ base de $\bigwedge^3(\mathfrak{b}_1)$ la matriz asociada al operador $\partial_3 : \bigwedge^3 \mathfrak{b}_0 \to \bigwedge^2 \mathfrak{b}_1$ es

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto $\dim \mathrm{Nu}\partial_3 = 0$, e $\dim \mathrm{Im}\,\partial_3 = 1$. Las dimensiones de la homología son

$$\dim H_0 = 1 \qquad \dim H_1 = 1 \qquad \dim H_2 = 0 \qquad \dim H_3 = 0$$

Example 4.3.2. Sea $\mathfrak{b}$ la subálgebra de Borel de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, sea V_0 la representación irreducible de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, haciendo actuar $\mathfrak{b}$ en V_0 definimos el producto semidirecto $\mathfrak{b}_0 = \mathfrak{b} \ltimes V_0$. Se calculará la homología $H_k(\mathfrak{b}_0)$ del siguiente complejo.

$$0 \to \bigwedge^3 \mathfrak{b}_0 \overset{\partial_3}{\to} \bigwedge^2 \mathfrak{b}_0 \overset{\partial_2}{\to} \quad \mathfrak{b}_0 \overset{\partial_1}{\to} \mathbb{C} \to 0$$

$$\text{con } \partial_k(x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_k) = \sum_{i<j} (-1)^{i+j+1}[x_i, x_j] \wedge x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge \widehat{x_i} \wedge \ldots \widehat{x_j} \wedge \ldots x_k.$$

Los operadores ∂_0, ∂_1 son nulos por lo tanto

$$\dim \mathrm{Nu}\partial_0 = 1, \qquad \dim \mathrm{Nu}\partial_1 = 3, \qquad \dim \mathrm{Im}\, \partial_1 = 0.$$

Sean $\mathfrak{B}_1 = \{H, E, e_0\}$ una base de $\mathfrak{b}_0$ donde e_0 es el autovector de peso máximo de 0 en H y $\mathfrak{B}_2 = \{H \wedge E, H \wedge e_0, E \wedge e_0\}$.

La matriz de ∂_2 con respecto a estas bases es

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\dim \mathrm{Nu}\, \partial_2 = 2, \quad \dim \mathrm{Im}\, \partial_2 = 1, \quad$ Base de $\mathrm{Nu}\, \partial_2 = \{H \wedge e_0, E \wedge e_0\}, \quad$ Base de $\mathrm{Im}\, \partial_2 = \{E\}$

Sea $\mathfrak{B}_3 = \{H \wedge E \wedge e_0\}$

La matriz de ∂_3 con respecto a las bases $\mathfrak{b}_3, \mathfrak{b}_2$ es

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\dim \mathrm{Nu}\, \partial_3 = 0, \qquad \dim \mathrm{Im}\, \partial_3 = 1, \qquad \text{Base de } \mathrm{Im}\, \partial_3 = \{E \wedge e_0\}.$$

La homología de $\mathfrak{b}_0$ con coeficientes triviales es

$$H_0 \simeq \mathbb{C}; \ \dim H_0 = 1 \quad H_1 \simeq \frac{b_0}{\langle E \rangle} \ \dim H_1 = 2; \quad H_2 \simeq \frac{\{H \wedge e_0, E \wedge e_0\}}{\langle E \wedge e_0 \rangle} \ \dim H_2 = 1; \quad H_3 = 0.$$

Example 4.3.3. Sea $\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{b} \ltimes V_1$ en este caso el complejo es

$$0 \to \bigwedge^4 \mathfrak{b}_1 \overset{\partial_4}{\to} \bigwedge^3 \mathfrak{b}_1 \overset{\partial_3}{\to} \bigwedge^2 \mathfrak{b}_1 \overset{\partial_2}{\to} \mathfrak{b}_1 \overset{\partial_1}{\to} \mathbb{C} \to 0$$

Como $\partial_0 = \partial_1 = 0$ entonces $\dim \mathrm{Nu}\, \partial_0 = 1$ y $\dim \mathrm{Nu}\, \partial_1 = 4$.

Sea $\{H, E, e_1, e_{-1}\}$ base de $\mathfrak{b}_1$ y $\{H \wedge E, H \wedge e_1, H \wedge e_{-1}, E \wedge e_1, E \wedge e_{-1}, e_1 \wedge e_{-1}\}$ una base de $\Lambda^2 \mathfrak{b}_1$ la matriz de ∂_2 es

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tenemos $\dim \mathrm{Nu}\, \partial_2 = 3$ y $\dim \mathrm{Im}\, \partial_2 = 3$.

Sea $\{H \wedge E \wedge e_1, H \wedge E \wedge e_{-1}, H \wedge e_1 \wedge e_{-1}, E \wedge e_1 \wedge e_{-1}$ un base de $\Lambda^3 \mathfrak{b}_1$.

La matriz asociada a ∂_3 es

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tenemos $\dim \operatorname{Nu} \partial_3 = 2$ y $\dim \operatorname{Im} \partial_3 = 2$.

Sea $\{H \wedge E \wedge e_1 \wedge e_{-1}$ una base de $\Lambda^4 \mathfrak{b}_1$. La matriz asociada a estas bases de ∂_4 es

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

La homología de $\mathfrak{b}_1$ con coeficientes triviales es

$$\dim H_0 = 1, \quad \dim H_1 = 1, \quad \dim H_2 = 1, \quad \dim H_3 = 1, \quad \dim H_4 = 0.$$

Example 4.3.4. Sea $\mathfrak{b}_2 = \mathfrak{b} \ltimes V_2$ en este caso el complejo es

$$0 \to \bigwedge^5 \mathfrak{b}_2 \overset{\partial_5}{\to} \bigwedge^4 \mathfrak{b}_2 \overset{\partial_4}{\to} \bigwedge^3 \mathfrak{b}_2 \overset{\partial_3}{\to} \bigwedge^2 \mathfrak{b}_2 \overset{\partial_2}{\to} \mathfrak{b}_2 \overset{\partial_1}{\to} \mathbb{C} \to 0$$

Sea $\{H, E, e_2, e_0, e_{-2}\}$ base de $\mathfrak{b}_2$.

Como $\partial_0 = \partial_1 = 0$ entonces $\dim \operatorname{Nu} \partial_0 = 1$ y $\dim \operatorname{Nu} \partial_1 = 5$

$\mathfrak{B}_2 = \{H \wedge E, H \wedge e_2, H \wedge e_0, H \wedge e_{-2}, E \wedge e_2, E \wedge e_0, E \wedge e_{-2}, e_2 \wedge e_0, e_2 \wedge e_{-2}, e_0 \wedge e_{-2}\}$ una base de $\Lambda^2 \mathfrak{b}_2$.

La matriz de ∂_2 es

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tenemos $\quad \dim \operatorname{Nu} \partial_2 = 6, \qquad \dim \operatorname{Im} \partial_2 = 4$

Sea $\mathfrak{B}_3 = \{H \wedge E \wedge e_2, H \wedge E \wedge e_0, H \wedge E \wedge e_{-2}, E \wedge e_2 \wedge e_0, E \wedge e_2 \wedge e_{-2}, H \wedge e_2 \wedge e_0, H \wedge e_2 \wedge e_{-2}, H \wedge e_0 \wedge e_{-2}, E \wedge e_0 \wedge e_{-2}, H \wedge E \wedge e_0 \wedge e_{-2}\}$ una base de $\bigwedge^3 \mathfrak{b}_2$.

La matriz de ∂_3 es la siguiente

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tenemos $\quad \dim \operatorname{Nu} \partial^3 = 4, \ \dim \operatorname{Im} \partial^3 = 6.$

Sea $\mathfrak{B}_4 = \{H \wedge E \wedge e_2 \wedge e_0, H \wedge E \wedge e_2 \wedge e_{-2}, E \wedge e_2 \wedge e_0 \wedge e_{-2}, H \wedge e_2 \wedge e_0 \wedge e_{-2},\}$ una base de $\bigwedge^4 \mathfrak{b}_2$.

La matriz de ∂^4 es

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tenemos $\quad \dim \operatorname{Nu} \partial^4 = 2, \ \dim \operatorname{Im} \partial^4 = 3.$

La homología de $\mathfrak{b}_2$ con coeficientes triviales es

$\dim H_0 = 1, \quad \dim H_1 = 1, \quad \dim H_2 = 0, \quad \dim H_3 = 1, \quad \dim H_4 = 1, \quad \dim H_5 = 0.$

Capítulo 5

Homología de las álgebras de Lie $\mathfrak{b}_n$

En este capítulo se expresa, para todo n, la dimensión de la homología de $\mathfrak{b}_n$ con coeficientes triviales $H_*(\mathfrak{b}_n)$ términos del carácter del álgebra exterior de las representaciones irreducibles de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$.

Recordemos que $H_*(\mathfrak{b}_n)$ es la homología del siguiente complejo

$$0 \to \bigwedge^{n+3} \mathfrak{b}_n \xrightarrow{\partial_{n+3}} \bigwedge^{n+2} \mathfrak{b}_n \xrightarrow{\partial_{n+2}} \dots \xrightarrow{\partial_{p+1}} \bigwedge^{p} \mathfrak{b}_n \xrightarrow{\partial_p} \bigwedge^{p-1} \mathfrak{b}_n \xrightarrow{\partial_{p-1}} \dots \to \bigwedge^{2} \mathfrak{b}_n \xrightarrow{\partial_2} \mathfrak{b}_n \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{C} \to 0$$

con $\partial_p(x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_p) = \sum_{i<j} (-1)^{i+j+1}[x_i, x_j] \wedge x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge \widehat{x_i} \wedge \ldots \widehat{x_j} \wedge \ldots \wedge x_p$. Notar que

$$\bigwedge^{k} \mathfrak{b} \ltimes V_n \simeq \bigwedge^{k} V_n \quad \oplus \quad \mathfrak{b} \otimes \bigwedge^{k-1} V_n \quad \oplus \quad \bigwedge^{2} \mathfrak{b} \otimes \bigwedge^{k-2} V_n.$$

De lo observado obtenemos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc}
... & & ... & & 0 & & & & \\
 & & & & \downarrow & & & & \\
\bigwedge^{k+1}(\mathfrak{b} \ltimes V_n) & \simeq ... & \mathfrak{b} \otimes \bigwedge^{k} V_n & \oplus & \bigwedge^2 \mathfrak{b} \otimes \bigwedge^{k-1} V_n & \oplus & 0 & & \\
\partial_{k+1} \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\bigwedge^{k}(\mathfrak{b} \ltimes V_n) & \simeq & \bigwedge^{k} V_n & \oplus & \mathfrak{b} \otimes \bigwedge^{k-1} V_n & \oplus & \bigwedge^2 \mathfrak{b} \otimes \bigwedge^{k-2} V_n & & \\
\partial_{k} \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\bigwedge^{k-1}(\mathfrak{b} \ltimes V_n) & \simeq & 0 & \oplus & \bigwedge^{k-1} V_n & \oplus & \mathfrak{b} \otimes \bigwedge^{k-2} V_n & & \\
 & & & & \downarrow & & & & \\
... & & & & 0 & & ... & &
\end{array} \tag{5.0.1}$$

Por lo tanto, el problema de calcular la homología del álgebra de Lie $\mathfrak{b}_n$ es equivalente a calcular la homología del siguiente complejo:

$$0 \to \bigwedge^{2} \mathfrak{b} \otimes \bigwedge^{k} V_n \xrightarrow{\partial_2} \mathfrak{b} \otimes \bigwedge^{k} V_n \xrightarrow{\partial_1} \bigwedge^{k} V_n \to 0$$

para todo k. Esta es la homología $H_*(\mathfrak{b}, \bigwedge^k V_n)$ del álgebra de Lie $\mathfrak{b}$ con coeficientes en $\bigwedge^k V_n$. Como conclusión obtenemos que

$$H_k(\mathfrak{b}_n) = H_0(\mathfrak{b}, \bigwedge^{k} V_n) \oplus H_1(\mathfrak{b}, \bigwedge^{k-1} V_n) \oplus H_2(\mathfrak{b}, \bigwedge^{k-2} V_n) \tag{5.0.2}$$

para $k = 0, \ldots, n+3$ (donde entendemos que $\bigwedge^j V_n = 0$ si $j > n+1$ o si $j < 0$).

5.1. Homología de $\mathfrak{b}$ con coeficientes en $\bigwedge^k V_n$

El cálculo de la homología del álgebra de Lie $\mathfrak{b}$ con coeficientes en $\bigwedge^k V_n$ se realizará en tres etapas.

1. Primero se calculará la homología $H_*(\mathfrak{b}, V_n)$ para cada representación irreducible de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$.
2. Luego estudiaremos $H_*(\mathfrak{b}, V)$ con V una representación de dimensón finita arbitraria de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$.
3. Finalmente obtendremos la homología del álgebra de Lie $\mathfrak{b}$ con coeficientes en $\bigwedge^k V_n$.

5.1.1. Homología del álgebra de Lie $\mathfrak{b}$ con coeficientes en V_n

Sabemos que $H_*(\mathfrak{b}, V_n)$ es la homología del siguiente complejo

$$0 \to \bigwedge^2 \mathfrak{b} \otimes V_n \xrightarrow{\partial_2} \mathfrak{b} \otimes V_n \xrightarrow{\partial_1} V_n \to 0$$

es decir que $H_j(\mathfrak{b}, V_n) = \dfrac{\mathrm{Nu}(\partial_j)}{\mathrm{Im}(\partial_{j+1})}$ con $j = 0, 1, 2$ (aquí $\partial_3 = 0$).

Theorem 5.1.1. *Sea $\mathfrak{b}$ la subálgebra de Borel de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ y sea V_n la representación irreducible de peso máximo n de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, entonces*

- *Si $n > 0$ entonces $H_j(\mathfrak{b}, V_n) = 0$ para $j = 0, 1, 2$.*
- *Si $n = 0$ entonces $H_j(\mathfrak{b}, V_0) = \begin{cases} \mathbb{C}, & si\ j = 0, 1; \\ 0, & si\ j = 2. \end{cases}$*

Demostración. Sea $\mathcal{B} = \{e_{n-2k} : k = 0, \ldots, n\}$ la base canónica de de V_n. Entonces

$$\mathcal{B}_1 = \{H \otimes e_{n-2k},\ E \otimes e_{n-2k} : k = 0, \ldots, n\}$$
$$\mathcal{B}_2 = \{H \wedge E \otimes e_{n-2k} : k = 0, \ldots, n\}$$

son bases de $\mathfrak{b} \otimes V_n$ y $\bigwedge^2 \mathfrak{b} \otimes V_n$ respectivamente. Calcularemos ahora las matrices de las siguientes dos transformaciones

$$\partial_1 : \mathfrak{b} \otimes V_n \to V_n$$
$$\partial_2 : \bigwedge^2 \mathfrak{b} \otimes V_n \to \mathfrak{b} \otimes V_n.$$

Comenzamos por ∂_1. Por definición

$$\begin{aligned} \partial_1(H \otimes e_{n-2k}) &= H \cdot e_{n-2k} \\ &= (n - 2k)e_{n-2k}, \\ \partial_1(E \otimes e_{n-2k}) &= E \cdot e_{n-2k} \\ &= (n + 1 - k)e_{n-2k+2}, \end{aligned}$$

para todo $k = 0, \ldots, n$ y $e_{n+2} = 0$. Por lo tanto la matriz de ∂_1 con respecto a las bases $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ es la siguiente matriz de $(n + 1)$ filas por $2(n + 1)$ columnas

$$\begin{pmatrix} n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & n-2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & n-1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & n-4 & \cdots & \vdots & 0 & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observemos que si $n > 0$ las últimas $n+2$ columnas de esta matriz contienen $n+1$ columnas linealmente independientes y una columna cero. Esto implica que la matriz es suryectiva y por lo tanto el núcleo tiene dimensión $n+1$. En cambio, si $n = 0$ esta matriz es nula y por lo tanto el núcleo tiene dimensión 2. Como conclusión tenemos que si $n > 0$ entonces

$$\dim \mathrm{Nu}\ \partial_1 = \dim V_n = n + 1 \tag{5.1.1}$$

y $\dim \mathrm{Nu}\ \partial_1 = 2$ si $n = 0$. Por lo tanto

$$H_0(\mathfrak{b}, V_n) = \begin{cases} 0, & \text{si } n > 0; \\ 1, & \text{si } n = 0. \end{cases}$$

Ahora calcularemos la matriz de $\partial_2 : \bigwedge^2 \mathfrak{b} \otimes V_n \to \mathfrak{b} \otimes V_n$. Por definición de ∂_2 tenemos

$$\begin{aligned} \partial_2(H \wedge E \otimes e_{n-2k}) &= [H, E] \otimes e_{n-2k} + E \otimes H \cdot e_{n-2k} - H \otimes E \cdot e_{n-2k} \\ &= 2E \otimes e_{n-2k} + (n - 2k)E \otimes e_{n-2k} - (n + 1 - k)H \otimes e_{n-2k+2} \\ &= (n - 2k + 2)E \otimes e_{n-2k} - (n + 1 - k)H \otimes e_{n-2k+2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto la matriz de ∂_2 asociada a las bases $\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1$ es la siguiente matriz de $2(n+1)$ filas por $(n+1)$ columnas

$$\begin{pmatrix} 0 & -n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -n+1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ n+2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & n-2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -n+2 \end{pmatrix}.$$

Acá vemos que para todo n, las primeras $n+1$ columnas son linealmente independientes y por lo tanto el rango de esta matriz es $n+1$, es decir que es inyectiva. Esto dice que $H_2(\mathfrak{b}, V_n) = 0$ para todo n. Además obtenemos que si $n > 0$ entonces $\mathrm{Nu}(\partial_1) = \mathrm{Im}(\partial_2)$ y por lo tanto $H_1(\mathfrak{b}, V_n) = 0$ mientras que si $n = 0$ entonces $\dim H_1(\mathfrak{b}, V_0) = 1$ y esto completa la prueba.

□

5.1.2. Homología con coeficientes en $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$-módulos de dimensión finita

Si V una representación de dimensón finita arbitraria de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ entonces V se puede descomponer como suma directa de representaciones irreducibles (hecho que ocurre para toda álgebra de Lie semisimple). Usando esto se calculará $H_*(\mathfrak{b}, V)$; homología del siguiente complejo

$$0 \to \bigwedge^2 \mathfrak{b} \otimes V \xrightarrow{\partial_2} \mathfrak{b} \otimes V \xrightarrow{\partial_1} V \to 0.$$

Theorem 5.1.2. *Sea V una representación de dimensón finita arbitraria de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$; sea $\alpha_0(V)$ la cantidad de veces que aparece V_0 en la descomposición en irreducibles de V entonces*

(a) $\dim(H_j(\mathfrak{b}, V)) = \alpha_0(V)$ *con* $j = 0, 1$*;*

(b) $\dim(H_2(\mathfrak{b}, V)) = 0$.

Demostración. Recordemos que en la Proposición 4.0.2 vimos que si $V = V_1 \oplus V_2$ como $\mathfrak{b}$-módulo, entonces $H_k(\mathfrak{b}, V) \simeq H_k(\mathfrak{b}, V_1) \oplus H_k(\mathfrak{b}, V_2)$ para todo $k = 0, 1, 2$. Por lo tanto, si

$$V = \alpha_0(V)V_0 \oplus \alpha_1(V)V_1 \oplus \cdots \oplus \alpha_r(V)V_r$$

con V_i representación irreducible con peso máximo i, obtenemos que

$$H_k(\mathfrak{b}, V) \simeq \alpha_0(V)H_k(\mathfrak{b}, V_0) \oplus \alpha_1(V)H_k(\mathfrak{b}, V_1) \oplus \cdots \oplus \alpha_r(V)H_k(\mathfrak{b}, V_r)$$

para $k = 0, 1, 2$. Usando el Teorema 5.1.1 obtenemos lo que queremos probar. □

Example 5.1.3. Para encontrar la homología $H_j(\mathfrak{b}, \bigwedge^2 V_n)$, que es la homología del complejo

$$0 \to \bigwedge^2 \mathfrak{b} \otimes \bigwedge^2 V_n \xrightarrow{\partial_2} \mathfrak{b} \otimes \bigwedge^2 V_n \xrightarrow{\partial_1} \bigwedge^2 V_n \to 0,$$

es suficiente encontrar $\alpha_0(\bigwedge^2 V_n)$. $\bigwedge^2 V_n$ se descompone en suma directa de irreducibles del siguiente modo

$$\bigwedge^2 V_n \simeq V_{2n-2} \oplus V_{2n-6} \oplus \cdots \oplus V_4 \oplus V_0, \text{ si } n \text{ es impar;}$$
$$\bigwedge^2 V_n \simeq V_{2n-2} \oplus V_{2n-6} \oplus \cdots \oplus V_6 \oplus V_2, \text{ si } n \text{ es par.}$$

Por lo tanto

$$\dim H_0(\mathfrak{b}, \bigwedge^2 V_n) = 1, \quad \dim H_1(\mathfrak{b}, \bigwedge^2 V_n) = 1, \quad \dim H_2(\mathfrak{b}, \bigwedge^2 V_n) = 0, \quad \text{si } n \text{ es impar;}$$
$$\dim H_0(\mathfrak{b}, \bigwedge^2 V_n) = 0, \quad \dim H_1(\mathfrak{b}, \bigwedge^2 V_n) = 0, \quad \dim H_2(\mathfrak{b}, \bigwedge^2 V_n) = 0, \quad \text{si } n \text{ es par;}$$

5.1.3. Cálculo$H_*(\mathfrak{b}, \bigwedge^k V_n)$

Para calcular la homología $H_*(\mathfrak{b}, \bigwedge^k V_n)$ tenemos que conocer $\alpha_0(\bigwedge^k V_n)$. El siguiente teorema nos permitirá encontrar la homología sin conocer demasiado explícitamente la descomposición de $\bigwedge^k V_n$ como suma directa de representaciones irreducibles.

Primero introducimos el siguiente concepto. Dada una representación (π, V) de dimensión finita de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ definimos el siguiente polinomio de Laurent $ch_V \in \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ dado por

$$ch_V = \sum_{r \in \mathbf{Z}} a_r q^r$$

donde a_r es la multiplicidad de r como autovalor de operador $\pi(H)$. Llamamos a ch_V el *carácter* de V. Por lo visto en el Capítulo 2, sabemos que los autovalores de $\pi(H)$ son enteros y como V es de dimensión finita resulta que $ch_V \in \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$.

Por ejemplo, sabemos que si V_n es la representación irreducible de peso máximo n entonces

$$ch_{V_n} = q^n + q^{n-2} + \cdots + q^{-n+2} + q^{-n} = \frac{q^{n+1} - q^{-n-1}}{q^1 - q^{-1}}.$$

También sabemos por la Proposición 3.2.9

$$V = \alpha_0(V)V_0 \oplus \alpha_1(V)V_1 \oplus \cdots \oplus \alpha_r(V)V_r$$

es la descomposición en irreducibles de V, entonces $\alpha_0(V)$ la diferencia entre el término constante y el término correspondiente a q^2 de ch_V. También es claro que $\dim V = ch_V(1)$.

Para obtener la homología $H_*(\mathfrak{b}, \bigwedge^k V_n)$ calcularemos $ch_{\bigwedge^k V_n}$ para todo $k = 0, \ldots, n+1$. Para ello recordamos las siguientes definiciones:

1. Para cada $n \in \mathbb{Z}_{\geq}0$, $[n]_q = \frac{1-q^n}{1-q}$. Este polinomio es llamado el q-número n.
2. Para cada $n \in \mathbb{Z}_{\geq}0$, $[n]_q! = [n]_q[n-1]_q \dots [1]_q$. Este polinomio es llamado el q-factorial de n.
3. Para cada $n, k \in \mathbb{Z}_{\geq}0$, $n \geq k$, $\binom{n}{k}_q = \dfrac{[n]_q!}{[k]_q![n-k]_q!}$. Este polinomio es llamado q-binomial Gaussiano. Como es usual, entendemos que $\binom{n}{k}_q = 0$ si $k > n$ o si $k < 0$.

Una de las propiedades principales del q-binomial Gausseano es la siguiente (ver Eugene Mukhin, Symmetric Polynomials and Partitions [13]):

Proposition 5.1.4. *Sean $n, k \in \mathbb{Z}_{\geq}0$ y supongamos que*

$$\binom{n+k}{k}_q = \sum_{r \in \mathbb{Z}} b_r q^r.$$

Entonces b_r es el número de particiones de r con a lo sumo k partes (con repeticiones) menores o iguales a n.

Observar que

$$ch_{V_n} = \frac{q^{n+1} - q^{-n-1}}{q^1 - q^{-1}} = \frac{q^{-n-1}}{q^{-1}} \frac{q^{2n+2} - 1}{q^2 - 1} = q^{-n-1}[n+1]_{q^2}. \tag{5.1.2}$$

El siguiente teorema extiende esta fórmula a $\bigwedge^k V_n$ para todo $k = 0, \dots, n+1$.

Theorem 5.1.5. *Sea V_{n-1} la representación irreducible de dimensión n de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, entonces*

$$ch_{\bigwedge^k V_{n-1}} = q^{k^2 - nk} \binom{n}{k}_{q^2}.$$

Demostración. Sabemos que

$$ch_{\bigwedge^k V_{n-1}} = \sum_{r \in \mathbf{Z}} a_r q^r$$

donde a_r es la multiplicidad de r como autovalor de H en $\bigwedge^k V_{n-1}$. Como los autovalores de H en V_{n-1} son $\{n-1, n-3, \cdots, -n+1\}$, cada uno con multiplicidad 1, obtenemos que a_r es la cantidad de formas de escribir r como suma de exactamente k elementos sin repeticiones del conjunto $\{n-1, n-3, \cdots, -n+1\}$.

Veamos además que a_r es la cantidad de formas de escribir $r + k(n+1)$ como suma de exactamente k elementos sin repeticiones del conjunto $\{2n, 2n-2, \cdots, 2\}$. Efectivamente, el cambio $\beta_i = \alpha_i + n + 1$ muestra que

$$r = \alpha_1 + \cdots + \alpha_k, \text{ con } \alpha_i \in \{n-1, n-3, \cdots, -n+1\} \text{ y } \alpha_i \neq \alpha_j$$

si y sólo si

$$r + k(n+1) = \beta_1 + \cdots + \beta_k, \text{ con } \beta_i \in \{2n, 2n-2, \cdots, 2\} \text{ y } \beta_i \neq \beta_j.$$

Es inmediato ahora que a_r es la cantidad de formas de escribir $\frac{r+k(n+1)}{2}$ como suma de exactamente k elementos sin repeticiones del conjunto $\{1, \cdots, n-1, n\}$.

Por otro lado, sea b_s el coeficiente de q^s en el q-binomial Gaussiano $\binom{n}{k}_q = \binom{n-k+k}{k}_q$. Por la Proposición 5.1.4 sabemos que b_s es la cantidad de particiones de s en a lo sumo k partes con repeticiones tomadas del conjunto $\{1, 2, \cdots, n-k\}$.

Agregando, si es necesario, ceros podemos suponer que b_s es igual a la cantidad de particiones de s en exactamente k partes con repeticiones tomadas de $\{0, 1, \cdots, n-k\}$. Sumando 1 a cada una de las partes es claro que b_s es igual a la cantidad de particiones de $s+k$ en exactamente k partes con repeticiones tomadas de $\{1, 2, \cdots, n-k+1\}$.

Veamos que además b_s es igual a la cantidad de particiones de $s+k+\binom{k}{2}$ en exactamente k partes, sin repeticiones, tomadas de $\{1, 2, \cdots, n\}$. Efectivamente, el cambio $\beta_i = \alpha_i + i - 1$ muestra que

$$s+k = \alpha_1 + \cdots + \alpha_k, \text{ con } \alpha_i \in \{1, 2, \cdots, n+1\}$$

si y sólo si

$$s+k+\binom{k}{2} = \beta_1 + \cdots + \beta_k, \text{ con } \beta_i \in \{1, 2, \cdots, n+k\} \text{ y } \beta_i \neq \beta_j.$$

Por lo tanto, hemos probado que $a_r = b_s$ con

$$\frac{r+k(n+1)}{2} = s+k+\binom{k}{2}$$

es decir $s = \frac{r-k^2+nk}{2}$. Finalmente es claro que si c_r es coeficiente de q^r en

$$q^{k^2-nk}\binom{n}{k}_{q^2}$$

entonces $c_r = b_{\frac{r-k^2+nk}{2}}$, y por lo tanto $c_r = a_r$. □

5.2. Homología de las álgebras de Lie $\mathfrak{b}_n = \mathfrak{b} \ltimes V_n$

Teniendo en cuenta los resultados de la seección anterior obtenemos el siguiente teorema.

Theorem 5.2.1. *Si $\mathfrak{b}_n = \mathfrak{b} \ltimes V_n$ entonces $H_{n+3}(\mathfrak{b}_n) = 0$ y para $0 \leq k \leq n+2$ se tiene*

$$\dim H_k(\mathfrak{b}_n) = \alpha_0(\bigwedge^k V_n) + \alpha_0(\bigwedge^{k-1} V_n)$$

donde entendemos que $\bigwedge^j V_n = 0$ si $j > n+1$ o si $j < 0$. En particular, si $c_r^{(k)}$ es el coeficiente de q^r en

$$q^{k^2-(n+1)k}\binom{n+1}{k}_{q^2}$$

entonces

$$\dim H_k(\mathfrak{b}_n) = c_0^{(k)} + c_0^{(k-1)} - c_2^{(k)} - c_2^{(k-1)}.$$

Demostración. De la identidad 5.2 tenemos

$$H_k(\mathfrak{b}_n) = H_0(\mathfrak{b}, \bigwedge^k V_n) \oplus H_1(\mathfrak{b}, \bigwedge^{k-1} V_n) \oplus H_2(\mathfrak{b}, \bigwedge^{k-2} V_n)$$

para $k = 0, \ldots, n+3$ (donde entendemos que $\bigwedge^j V_n = 0$ si $j > n+1$ o si $j < 0$).

Por el Teorema 5.1.2 podemos concluir que

$\dim(H_2(\mathfrak{b}, \bigwedge^{k-2} V_n)) = 0$ $\forall k = 0, \ldots, n+3$ y $\dim(H_j(\mathfrak{b}, \bigwedge^k V_n) = \alpha_0(\bigwedge^k V_n)$ con $j = 0, 1$ y $k = 0, \ldots, n+3$ entonces

$$\dim H_k(\mathfrak{b}_n) = \alpha_0(\bigwedge^k V_n)) + \alpha_0(\bigwedge^{k-1} V_n).$$

Para $k = n+3$ tenemos $\bigwedge^{n+3} V_n = 0$ y $\bigwedge^{n+2} V_n = 0$ entonces $H_{n+3}(\mathfrak{b}_n) = 0$.

Por Proposición 3.2.9 y Teorema 5.1.5 concluimos

$$\dim H_k(\mathfrak{b}_n) = c_0^{(k)} + c_0^{(k-1)} - c_2^{(k)} - c_2^{(k-1)}.$$

$\square$

A continuación se muestra una tabla con el cálculo de $\dim H_k(b_n)$ para alguno valores de n y sus correspondientes k

n	$\dim b_n$	$\dim H_k(b_n)$
0	3	$1,2,1,0$
1	4	$1,1,1,1,0$
2	5	$1,1,0,1,1,0$
3	6	$1,1,1,1,1,1,0$
4	7	$1,1,0,0,0,1,1,0$
10	13	$1,1,0,1,2,1,0,1,2,1,0,1,1,0$
20	23	$1,1,0,0,3,7,5,5,26,50,41,26,41,50,26,5,5,7,3,0,0,1,1,0$

Remark 5.2.2. Los coeficientes binomial Gaussiano son polinomios es decir $\binom{n}{k}_q = \sum_{r=0}^{m} b_r q^r$ en consecuencia $\binom{n}{k}_{q^2} = \sum_{r=0}^{m} b_r q^{2r}$. Si k es impar y n impar entonces $k^2 - (n+1)k$ es impar por lo tanto en la expresión $q^{k^2-(n+1)k}\binom{n}{k}_{q^2}$ las potencias positivas o cero de q son impares.

Conclusion: k impar n impar $c_0^k = c_2^k = 0$ entonces $\dim H_k(b_n) = c_0^{k-1} - c_2^{k-1}$.

Corollary 5.2.3. *Sea $\mathfrak{b}_n = \mathfrak{b} \ltimes V_n$ entonces:*

1. $\dim H_k(\mathfrak{b}_n) = \dim H_{n+2-k}(\mathfrak{b}_n)$ *para* $0 \leq k \leq n+2$.
2. $\dim H_2(\mathfrak{b}_n) = 0$ *para todo n par.*
3. $\dim H_2(\mathfrak{b}_n) = 1$ *para todo n impar.*
4. $\dim H_3(\mathfrak{b}_n) = 0$ *para todo n múltiplo de 4.*
5. $\dim H_3(\mathfrak{b}_n) = 1$ *para todo n que no es múltiplo de 4.*

Demostración. 1) Por el teorema anterior, debemos probar que

$$c_0^{(k)} + c_0^{(k-1)} - c_2^{(k)} - c_2^{(k-1)} = c_0^{(n+2-k)} + c_0^{(n+1-k)} - c_2^{(n+2-k)} - c_2^{(n+1-k)},$$

Los polinomios de Laurent

$$ch_{\bigwedge^s V_n} = q^{s^2-(n+1)s}\binom{n+1}{s}_{q^2}$$

cumplen $ch_{\bigwedge^s V_n} = ch_{\bigwedge^{n+1-s} V_n}$ para todo $s = 0, \ldots, n+1$. Por lo tanto $c_i^{(k)} = c_i^{(n+1-k)}$ y $c_i^{(k-1)} = c_i^{(n+2-k)}$ para $i = 0, 2$.

2) Sea $n=2h$ con $h\geq 1$ y $k=2$ entonces

$$ch_{\bigwedge^2 V_{2h}} = q^{2-4h}\binom{2h+1}{2}_{q^2} = q^{2-4h}\frac{(1-q^{4h+2})(1-q^{4h})}{(1-q^2)(1-q^4)}$$

Haciendo el cambio de variable $q=q^2$ obtenemos

$$q^{1-2h}\frac{(1-q^{2h+1})(1-q^{2h})}{(1-q)(1-q^2)} = (q^{2h-2}+q^{2h-4}+\ldots+q^2+1)(q^{2h}+q^{2h-1}+\ldots+q^2+q+1)q^{1-2h} =$$
$$(q^{2h-2}+q^{2h-4}+\ldots+q^2+1)(q+q^0+q^{-1}+\ldots+q^{2-2h}+q^{1-2h}).$$

Por lo tanto

$$q^{1-2h}\frac{(1-q^{2h+1})(1-q^{2h})}{(1-q)(1-q^2)} = (\sum_{t=1}^{h} q^{2h-2t})(\sum_{k=-1}^{2h-1} q^{-k}),$$

para cada $1\leq t\leq h$ en el polinomio $q^{2h-2t}\sum_{k=-1}^{2h-1} q^{-k}$ tenemos $k=2h-2t$ y $k=2h-2t-1$ ambos entre -1 y$2h-1$ pues

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \leq & 2h-2t & \leq & -2+2h & < & -1+2h & \text{y} \\ -1 & \leq & 2h-2t-1 & < & -3+2h & < & -1+2h & . \end{array}$$

por lo tanto los coeficientes de q^0 y q son iguales a h. Hemos obtenido que $c_0^2=c_2^2$.
Para $k=1$ tenemos $c_0^1=c_2^1=1$ por la fórmula 5.1.2. Para $h=0$ tenemos $\bigwedge^2 V_0=0$
En consecuencia $\dim H_2(\mathfrak{b}_{2h})=0$ para todo h.

3) Sea $n=2h+1$ con $h\geq 0$ y $k=2$ entonces

$$ch_{\bigwedge^2 V_{2h+1}} = q^{-4h}\binom{2h+2}{2}_{q^2} = q^{-4h}\frac{(1-q^{4h+4})(1-q^{4h+2})}{(1-q^2)(1-q^4)}$$

Haciendo el cambio de variable $q=q^2$ obtenemos

$$q^{-2h}\frac{(1-q^{2h+2})(1-q^{2h+1})}{(1-q)(1-q^2)} = (q^{2h}+q^{2h-2}+\ldots+q^2+1)(q^{2h}+q^{2h-1}+\ldots+q^2+q+1)q^{-2h}) =$$
$$(q^{2h}+q^{2h-2}+\ldots+q^2+1)(q^0+q^{-1}+\ldots+q^{-2h+1}+q^{-2h}).$$

Por lo tanto

$$q^{-2h}\frac{(1-q^{2h+2})(1-q^{2h+1})}{(1-q)(1-q^2)} = (\sum_{t=0}^{2h} q^{2h-2t})(\sum_{k=0}^{2h} q^{-k}). \tag{5.2.1}$$

Los coeficientes q^0 y q del polinomio $q^{2h-2t}\sum_{k=0}^{2h} q^{-k}$ para $t=0$ son 1 y 0 respectivamente y para $1\leq t\leq 2h$ son ambos 1. Por lo tanto $q^0=h+1$ y $q=h$ en el polinomio $(\sum_{t=0}^{2h} q^{2h-2t})(\sum_{k=0}^{2h} q^{-k})$. En consecuencia $c_0^2=h+1$ y $c_2^2=h$ y $c_0^1=c_2^1=1$. Por lo tanto $\dim H_2(\mathfrak{b}_{2h+1})=1$.

4) Sea $n=4h$ con $h\geq 1$ entonces

$$ch_{\bigwedge^3 V_{4h}} = q^{6-12h}\binom{4h+1}{3}_{q^2} = q^{6-12h}\frac{(1-q^{8h+2})(1-q^{8h})(1-q^{8h-2})}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)}$$

Haciendo el cambio de variable $q=q^2$ obtenemos

$$ch_{\bigwedge^3 V_{4h}} = q^{3-6h}\frac{(1-q^{4h+1})(1-q^{4h})(1-q^{4h-1})}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)}$$

a) Sea $h = 3s$

$$f(q) = q^{3-18s}\frac{(1-q^{12s+1})(1-q^{12s})(1-q^{12s-1})}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)} =$$

$$q^{3-18s}(q^{12s}+q^{12s-1}+\ldots+q+1)(q^{12s-2}+q^{12s-3}+\ldots+q+1)$$

$$(q^{12s-4}-q^{12s-5}+q^{12s-6}+q^{12s-10}-q^{12s-11}+q^{12s-12}\ldots+q^2-q+1) =$$

$$q^{3-18s}\left(\sum_{r=0}^{12s} q^r\right)\left(\sum_{r=0}^{12s-2} q^r\right)\left(\sum_{t=0}^{2s-1} q^{6t+2}-\sum_{t=0}^{2s-1} q^{6t+1}+\sum_{t=0}^{2s-1} q^{6t}\right) =$$

$$q^{3-18s}\left(q^2-q+1\right)\left(\sum_{t=0}^{2s-1} q^{6t}\right)$$

$$\left(\sum_{r=0}^{12s-2}(r+1)q^r+(12s-1)q^{12s-1}+\sum_{r=0}^{12s-2}(12s-r-1)q^{12s+r}\right) =$$

$$\left(\sum_{t=0}^{2s-1} q^{6t}\right)\left(\sum_{r=0}^{12s-2}(r+1)q^{5-18s+r}+(12s-1)q^{4-6s}+\sum_{r=0}^{12s-2}(12s-r-1)q^{5-6s+r}\right.$$
$$-\sum_{r=0}^{12s-2}(r+1)q^{4-18s+r}-(12s-1)q^{3-6s}-\sum_{r=0}^{12s-2}(12s-r-1)q^{4-6s+r}$$
$$\left.+\sum_{r=0}^{12s-2}(r+1)q^{3-18s+r}+(12s-1)q^{2-6s}+\sum_{r=0}^{12s-2}(12s-r-1)q^{3-6s+r}\right)$$

Sea

$$p(q) = \sum_{r=0}^{12s-2}(r+1)q^{5-18s+r}+(12s-1)q^{4-6s}+\sum_{r=0}^{12s-2}(12s-r-1)q^{5-6s+r}$$
$$-\sum_{r=0}^{12s-2}(r+1)q^{4-18s+r}-(12s-1)q^{3-6s}-\sum_{r=0}^{12s-2}(12s-r-1)q^{4-6s+r}$$
$$+\sum_{r=0}^{12s-2}(r+1)q^{3-18s+r}+(12s-1)q^{2-6s}+\sum_{r=0}^{12s-2}(12s-r-1)q^{3-6s+r}$$

$$q^{6t}p(q) = \sum_{r=0}^{12s-2}(r+1)q^{5-18s+r+6t}+(12s-1)q^{4-6s+6t}+\sum_{r=0}^{12s-2}(12s-r-1)q^{5-6s+r+6t}$$
$$-\sum_{r=0}^{12s-2}(r+1)q^{4-18s+r+6t}-(12s-1)q^{3-6s+6t}-\sum_{r=0}^{12s-2}(12s-r-1)q^{4-6s+r+6t}$$
$$+\sum_{r=0}^{12s-2}(r+1)q^{3-18s+r+6t}+(12s-1)q^{2-6s+6t}+\sum_{r=0}^{12s-2}(12s-r-1)q^{3-6s+r+6t}$$

Se quiere calcular el coeficiente de q^0 y q de f.

I) Cálculo del coeficiente de q^0.
Para cada $0 \leq t \leq 2s-1$ se necesita encontrar los valores de r con $0 \leq r \leq 12s-2$

tal que

$$\begin{aligned} 5-18s+r+6t &= 0 \\ 4-6s+6t &= 0 \\ 5-6s+r+6t &= 0 \\ 4-18s+r+6t &= 0 \\ 3-6s+6t &= 0 \\ 4-6s+r+6t &= 0 \\ 3-18s+r+6t &= 0 \\ 3-6s+6t &= 0 \\ 3-6s+r+6t &= 0 \end{aligned}$$

Si $r=-5+18s-6t$, $r=-4+18s-6t$, $r=-3+18s-6t$ los valores t para los cuales $0\le -5+18s-6t \le 12s-2, 0\le -4+18s-6t \le 12s-2, 0\le -3+18s-6t \le 12s-2$ son $s\le t\le 2s-1$. El coeficiente de q^0 del polinomio

$$\left(\sum_{t=0}^{2s-1} q^{6t}\right)\left(\sum_{r=0}^{12s-2}(r+1)\left(q^{5-18s+r}-q^{4-18s+r}+q^{3-18s+r}\right)\right)$$

es $\sum_{t=s}^{2s-1} -3+18s-6t = 9s^2$.

Si $r=-5+6s-6t$, $r=-4+6s-6t$, $r=-3+6s-6t$ los valores t para los cuales $0\le -5+6s-6t\le 12s-2, 0\le -4+6s-6t\le 12s-2, 0\le -3+6s-6t\le 12s-2$ son $0\le t\le s-1$. El coeficiente de q^0 del polinomio

$$\left(\sum_{t=0}^{2s-1} q^{6t}\right)\left(\sum_{r=0}^{12s-2}(12s-r-1)\left(q^{5-6s+r}-q^{4-6s+r}+q^{3-6s+r}\right)\right)$$

es $\sum_{t=0}^{s-1} 3+6s+6t = 9s^2$.

No existe ningún valor de t para el cual $4-6s+6t=0, 3-6s+6t=0, 2-6s+6t=0$.

Por lo tanto el coeficiente de q^0 del polinomio f es $18s^2$.

II) Cálculo del coeficiente de q
Para cada $0\le t\le 2s-1$ se necesita encontrar los valores de r con $0\le r\le 12s-2$ tal que

$$\begin{aligned} 5-18s+r+6t &= 1 \\ 4-6s+6t &= 1 \\ 5-6s+r+6t &= 1 \\ 4-18s+r+6t &= 1 \\ 3-6s+6t &= 1 \\ 4-6s+r+6t &= 1 \\ 3-18s+r+6t &= 1 \\ 3-6s+6t &= 1 \\ 3-6s+r+6t &= 1 \end{aligned}$$

Si $r = -4+18s-6t, r = -3+18s-6t, r = -2+18s-6t$ los valores t para los cuales $0 \leq -4+18s-6t \leq 12s-2, 0 \leq -3+18s-6t \leq 12s-2, 0 \leq -2+18s-6t \leq 12s-2$ son $s \leq t \leq 2s-1$. El coeficiente de q del polinomio

$$\left(\sum_{t=0}^{2s-1} q^{6t}\right)\left(\sum_{r=0}^{12s-2}(r+1)\left(q^{5-18s+r} - q^{4-18s+r} + q^{3-18s+r}\right)\right)$$

es $\sum_{t=s}^{2s-1} -2+18s-6t = 9s^2+s$.

Si $r = -4+6s-6t, r = -3+6s-6t, r = -2+6s-6t$ los valores t para los cuales $0 \leq -4+6s-6t \leq 12s-2, 0 \leq -3+6s-6t \leq 12s-2, 0 \leq -2+6s-6t \leq 12s-2$ son $0 \leq t \leq s-1$. El coeficiente de q del polinomio

$$\left(\sum_{t=0}^{2s-1} q^{6t}\right)\left(\sum_{r=0}^{12s-2}(12s-r-1)\left(q^{5-6s+r} - q^{4-6s+r} + q^{3-6s+r}\right)\right)$$

es $\sum_{t=0}^{s-1} 2+6s+6t = 9s^2-s$.

No existe ningún valor de t para el cual $4-6s+6t = 1, 3-6s+6t = 1, 2-6s+6t = 1$.

Por lo tanto el coeficiente de q del polinomio f es $18s^2$.

En consecuencia $c_0^3 = c_2^3$ y por el Teorema 5.2.1y por inciso 2 de este corolario $\dim H_3(b_n) = (c_0^3 - c_2^3) + (c_0^3 - c_2^3) = 0$, si $n = 12s$.

b) Sea $h = 3s+1$

$$f(q) = q^{-3-18s}\frac{(1-q^{12s+5})(1-q^{12s+4})(1-q^{12s+3})}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)} =$$

$$q^{-3-18s}\left(\sum_{r=0}^{12s+4} q^r\right)\left(\sum_{r=0}^{6s+1} q^{2r}\right)\left(\sum_{r=0}^{4s+1} q^{3r}\right) =$$

$$\left(\sum_{t=0}^{4s} q^{3t}\right)\left(\sum_{r=0}^{6s+1}(r+1)q^{-3-18s+2r} + \sum_{r=0}^{6s+1}(r+1)q^{3+6s-2r} + \right.$$

$$\left.\sum_{r=0}^{6s+1}(r+1)q^{-2-18s+2r} + \sum_{r=0}^{6s+1}(r+1)q^{2+6s-2r}\right)$$

Sea

$$p(q) = \sum_{r=0}^{6s+1}(r+1)((q^{-3-18s+2r} + q^{-2-18s+2r} + q^{3+6s-2r} + q^{2+6s-2r}).$$

Tenemos

$$q^{3t}p(q) = \sum_{r=0}^{6s+1}(r+1)((q^{-3-18s+2r+3t} + q^{-2-18s+2r+3t} + q^{3+6s-2r+3t} + q^{2+6s-2r+3t})$$

I) Cálculo del coeficiente de q^0.
Para cada $0 \leq t \leq 4s$ se necesita encontrar los valores de r con $0 \leq r \leq 6s+1$ tal que

$$\begin{aligned}
-3-18s+2r+3t &= 0\\
-2-18s+2r+3t &= 0\\
3+6s-2r+3t &= 0\\
2+6s-2r+3t &= 0.
\end{aligned}$$

Si $r = 3/2+9s-3/2t$ los valores de t que satisfacen $0 \leq 3/2+9s-3/2t \leq 6s+1$ son los t impares que cumplen $2s+1 \leq t \leq 4s-1$. El coeficiente de q^0 del polinomio $\left(\sum_{t=0}^{4s} q^{3t}\right)\left(\sum_{r=0}^{6s+1}(r+1)q^{-3-18s+2r}\right)$ es $\sum_{0}^{s-1} 1+6s-3k = 9/2s^2+5/2s$.

Si $r = 1+9s-3/2t$ los valores de t que satisfacen $0 \leq 1+9s-3/2t \leq 6s+1$ son los t pares que cumplen $2s \leq t \leq 4s$. El coeficiente de q^0 del polinomio $\left(\sum_{t=0}^{4s} q^{3t}\right)\left(\sum_{r=0}^{6s+1}(r+1)q^{-2-18s+2r}\right)$ es $\sum_{s}^{2s} 2+9s-3k = 9/2s^2+13/2s+2$.

Si $r = 3/2+3s+3/2t$ los valores de t que satisfacen $0 \leq 3/2+3s+3/2t \leq 6s+1$ son los t impares que cumplen $1 \leq t \leq 2s-1$. El coeficiente de q^0 del polinomio $\left(\sum_{t=0}^{4s} q^{3t}\right)\left(\sum_{r=0}^{6s+1}(r+1)q^{3+6s-2r}\right)$ es $\sum_{0}^{s-1} 4+3s+3k = 9/2s^2+5/2s$.

Si $r = 1+3s+3/2t$ los valores de t que satisfacen $0 \leq 1+3s+3/2t \leq 6s+1$ son los t pares que cumplen $0 \leq t \leq 2s-2$. El coeficiente de q^0 del polinomio $\left(\sum_{t=0}^{4s} q^{3t}\right)\left(\sum_{r=0}^{6s+1}(r+1)q^{2+6s-2r}\right)$ es $\sum_{0}^{s-1} 2+3s+3k = 9/2s^2+1/2s$.

Por lo tanto el coeficiente de q^0 del polinomio f es $18s^2+12s+2$

II) Cálculo del coeficiente de q.
Para cada $0 \leq t \leq 4s$ se necesita encontrar los valores de r con $0 \leq r \leq 6s+1$ tal que

$$\begin{aligned} -3-18s+2r+3t &= 1 \\ -2-18s+2r+3t &= 1 \\ 3+6s-2r+3t &= 1 \\ 2+6s-2r+3t &= 1. \end{aligned}$$

Si $r = 2+9s-3/2t$ los valores de t que satisfacen $0 \leq 2+9s-3/2t \leq 6s+1$ son los t pares que cumplen $2s+2 \leq t \leq 4s$. El coeficiente de q del polinomio $\left(\sum_{t=0}^{4s} q^{3t}\right)\left(\sum_{r=0}^{6s+1}(r+1)q^{-3-18s+2r}\right)$ es $\sum_{s+1}^{2s} 3+9s-3k = 9/2s^2+3/2s$.

Si $r = 3/2+9s-3/2t$ los valores de t que satisfacen $0 \leq 3/2+9s-3/2t \leq 6s+1$ son los t impares que cumplen $2s+1 \leq t \leq 4s-1$. El coeficiente de q del polinomio $\left(\sum_{t=0}^{4s} q^{3t}\right)\left(\sum_{r=0}^{6s+1}(r+1)q^{-2-18s+2r}\right)$ es $\sum_{s}^{2s-1} 1+9s-3k = 9/2s^2+5/2s$.

Si $r = 1+3s+3/2t$ los valores de t que satisfacen
$0 \leq 1+3s+3/2t \leq 6s+1$ son los t pares que cumplen $0 \leq t \leq 2s$. El coeficiente de q del polinomio $\left(\sum_{t=0}^{4s} q^{3t}\right)\left(\sum_{r=0}^{6s+1}(r+1)q^{3+6s-2r}\right)$ es $\sum_{0}^{s} 2+3s+3t = 9/2s^2+13/2s+2$.

Si $r = 1/2+3s+3/2t$ los valores de t que satisfacen $0 \leq 1/2+3s+3/2t \leq 6s+1$ son los t impares que cumplen $1 \leq t \leq 2s-1$. El coeficiente de q del polinomio $\left(\sum_{t=0}^{4s} q^{3t}\right)\left(\sum_{r=0}^{6s+1}(r+1)q^{2+6s-2r}\right)$ es $\sum_{1}^{s} 3s+3t = 9/2s^2+3/2s$.

Por lo tanto el coeficiente de q del polinomio f es $18s^2+12s+2$

Por lo tanto $c_0^3 = c_2^3$ y por el Teorema 5.2.1y por inciso 2 de este corolario si $n = 12s+4$, entonces $\dim H_3(b_n) = (c_0^3 - c_2^3) + (c_0^3 - c_2^3) = 0$

c) Sea $h = 3s + 2$

$$f(q) = q^{-9-18s}\frac{(1-q^{12s+9})(1-q^{12s+8})(1-q^{12s+7})}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)} =$$

$$q^{-9-18s}(q^{12s+6} + q^{12s+5} + \ldots + q + 1)(q^{12s+6} + q^{12s+4} + \ldots + q^2 + 1)$$

$$(q^{12s+6} + q^{12s+3} + q^{12s} + \ldots + q^3 + 1) =$$

$$\left(\sum_{t=0}^{4s+2} q^{3t}\right)\left(\sum_{r=0}^{6s+3}(r+1)q^{-9-18s+2r} + \sum_{r=0}^{6s+2}(r+1)q^{3+6s-2r} + \right.$$

$$\left.\sum_{r=0}^{6s+2}(r+1)q^{-8-18s+2r} + \sum_{r=0}^{6s+2}(r+1)q^{2+6s-2r}\right)$$

Sea

$$p(q) = \sum_{r=0}^{6s+3}(r+1)q^{-9-18s+2r} + \sum_{r=0}^{6s+2}(r+1)(q^{3+6s-2r} + q^{-8-18s+2r} + q^{2+6s-2r})$$

Tenemos

$$q^{3t}p(q) = \sum_{r=0}^{6s+3}(r+1)q^{-9-18s+2r+3t} +$$

$$\sum_{r=0}^{6s+2}(r+1)(q^{3+6s-2r+3t} + q^{-8-18s+2r+3t} + q^{2+6s-2r+3t}).$$

I) Cálculo del coeficiente de q^0.
Para cada $0 \leq t \leq 4s+2$ se necesita encontrar los valores de r con $0 \leq r \leq 6s+3$ tal que

$$-9 - 18s + 2r + 3t = 0$$

y los valores de r con $0 \leq r \leq 6s+2$ tal que

$$\begin{aligned} 6s + 3 - 2r + 3t &= 0 \\ -8 - 18s + 2r + 3t &= 0 \\ 2 + 6s - 2r + 3t &= 0 \end{aligned}$$

Si $r = 9/2 + 9s - 3/2t$ los valores de t que satisfacen $0 \leq 9/2 + 9s - 3/2t \leq 6s+3$ son los t impares que cumplen $2s+1 \leq t \leq 4s+1$. El coeficiente de q^0 del polinomio $\left(\sum_{t=0}^{4s+2} q^{3t}\right)\left(\sum_{r=0}^{6s+3}(r+1)q^{-9-18s+2r}\right)$ es $\sum_s^{2s} 4 + 9s - 3k = 9/2s^2 + 17/2s + 4$.

Si $r = 3/2 + 3s + 3/2t$ los valores de t que satisfacen $0 \leq 3/2 + 3s + 3/2t \leq 6s+2$ son los t impares que cumplen $1 \leq t \leq 2s - 1$. El coeficiente de q^0 del polinomio $\left(\sum_{t=0}^{4s+2} q^{3t}\right)\left(\sum_{r=0}^{6s+2}(r+1)q^{6s+3-2r}\right)$ es $\sum_1^{s} 1 + 3s + 3k = 9/2s^2 + 5/2s$.

Si $r = 4 + 9s - 3/2t$ los valores de t que satisfacen $0 \leq 4 + 9s - 3/2t \leq 6s+2$ son los t pares que cumplen $2s+2 \leq t \leq 4s+2$. El coeficiente de q^0 del polinomio $\left(\sum_{t=0}^{4s+2} q^{3t}\right)\left(\sum_{r=0}^{6s+2}(r+1)q^{-8-18s+2r}\right)$ es $\sum_s^{2s} 2 + 9s - 3k = 9/2s^2 + 13/2s + 2$.

Si $r = 1 + 3s + 3/2t$ los valores de t que satisfacen $0 \leq 1 + 3s + 3/2t \leq 6s+2$ son los t pares que cumplen $0 \leq t \leq 2s$. El coeficiente de q^0 del polinomio $\left(\sum_{t=0}^{4s+2} q^{3t}\right)\left(\sum_{r=0}^{6s+2}(r+1)q^{2+6s-2r}\right)$ es $\sum_0^{s} 2 + 3s + 3k = 9/2s^2 + 13/2s + 2$.

Por lo tanto el coeficiente de q^0 del polinomio f es $18s^2 + 24s + 8$

II) Cálculo del coeficiente de q.
Para cada $0 \leq t \leq 4s+2$ se necesita encontrar los valores de r con $0 \leq r \leq 6s+3$ tal que

$$-9 - 18s + 3t + 2r = 1$$

y los valores de r con $0 \leq r \leq 6s+2$ tal que

$$\begin{aligned} 6s + 3 + 3t - 2r &= 1 \\ -8 - 18s + 3t + 2r &= 1 \\ 2 + 6s + 3t - 2r &= 1 \end{aligned}$$

Si $r = 5 + 9s - 3/2t$ los valores de t que satisfacen $0 \leq 5 + 9s - 3/2t \leq 6s+3$ son los t pares que cumplen $2s+2 \leq t \leq 4s+2$. El coeficiente de q del polinomio $\left(\sum_{t=0}^{4s+2} q^{-9-18s+3t}\right) \sum_{r=0}^{6s+3} (r+1)q^{2r}$ es $\sum_{s}^{2s} 3 + 9s - 3k = 9/2s^2 + 15/2s + 3$.

Si $r = 1 + 3s + 3/2t$ los valores de t que satisfacen $0 \leq 1 + 3s + 3/2t \leq 6s + 2$ son los t pares que cumplen $0 \leq t \leq 2s$. El coeficiente de q del polinomio $\left(\sum_{t=0}^{4s+2} q^{-9-18s+3t}\right) \sum_{r=0}^{6s+2} (r+1)q^{24s+12-2r}$ es $\sum_{0}^{s} 2+3s+3k = 9/2s^2 + 13/2s + 2$.

Si $r = 9/2 + 9s - 3/2t$ los valores de t que satisfacen $0 \leq 9/2 + 9s - 3/2t \leq 6s+2$ son los t impares que cumplen $2s+3 \leq t \leq 4s+1$. El coeficiente de q del polinomio $\left(\sum_{t=0}^{4s+2} q^{-9-18s+3t}\right) \sum_{r=0}^{6s+2} (r+1)q^{2r+1}$ es $\sum_{s}^{2s-1} 1 + 9s - 3k = 9/2s^2 + 5/2s$.

Si $r = 1/2 + 3s + 3/2t$ los valores de t que satisfacen $0 \leq 1/2 + 3s + 3/2t \leq 6s+2$ son los t impares que cumplen $1 \leq t \leq 2s+1$. El coeficiente de q del polinomio $\left(\sum_{t=0}^{4s+2} q^{-9-18s+3t}\right) \sum_{r=0}^{6s+2} (r+1)q^{11+24s-2r}$ es $\sum_{0}^{s} 3+3s+3k = 9/2s^2 + 15/2s + 3$.

Por lo tanto el coeficiente de q del polinomio f es $18s^2 + 24s + 8$.

En consecuencia $c_0^3 = c_2^3$ y por el Teorema 5.2.1y por inciso 2 de este corolario si $n = 12s + 8$, entonces $\dim H_3(b_n) = (c_0^3 - c_2^3) + (c_0^3 - c_2^3) = 0$.

Conclusión : $\dim H_3(b_n) = 0$ para todo n múltiplo de 4.

5) n no es múltiplo de 4

a) Sea $n = 4h+1$, en este caso n, k son impares por la Observación 5.2.2 y por inciso 3) de este corolario $\dim H_3(b_n) = 1$.

b) Sea $n = 4h+2$

$$ch_{\bigwedge^3 V_{4h+2}} = q^{-12h} \binom{4h+3}{3}_{q^2} = q^{-12h} \frac{(1-q^{8h+6})(1-q^{8h+4})(1-q^{8h+2})}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)}$$

Haciendo el cambio de variable $q = q^2$ obtenemos

$$ch_{\bigwedge^3 V_{4h+2}} = q^{-6h} \frac{(1-q^{4h+3})(1-q^{4h+2})(1-q^{4h+1})}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)}$$

I) Sea $h = 3s$

$$f(q) = q^{-18s}\frac{(1-q^{12s+3})(1-q^{12s+2})(1-q^{12s+1})}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)} =$$

$$q^{-18s}\left(\sum_{r=0}^{12s} q^r\right)\left(\sum_{r=0}^{6s} q^{2r}\right)\left(\sum_{r=0}^{4s} q^{3r}\right) =$$

$$\left(\sum_{t=0}^{4s} q^{3t}\right)\left(\sum_{r=0}^{6s}(r+1)q^{-18s+2r} + \sum_{r=0}^{6s-1}(r+1)q^{6s-2r} + \right.$$
$$\left.\sum_{r=0}^{6s-1}(r+1)q^{-18s+2r+1} + \sum_{r=0}^{6s-1}(r+1)q^{6s-2r-1}\right)$$

Sea

$$p(q) = \sum_{r=0}^{6s}(r+1)q^{-18s+2r} + \sum_{r=0}^{6s-1}(r+1)(q^{6s-2r} + q^{-18s+2r+1} + q^{6s-2r-1})$$

Tenemos

$$q^{3t}p(q) = \sum_{r=0}^{6s}(r+1)q^{-18s+2r+3t} +$$
$$\sum_{r=0}^{6s-1}(r+1)(q^{6s-2r+3t} + q^{1-18s+2r+3t} + q^{-1+6s-2r+3t})$$

- Cálculo del coeficiente de q^0.
  Para cada $0 \leq t \leq 4s$ se necesita encontrar los valores de r con $0 \leq r \leq 6s$ tal que

  $$-18s + 2r + 3t = 0$$

  y los valores de r con $0 \leq r \leq 6s-1$ tal que

  $$\begin{aligned} 6s - 2r + 3t &= 0 \\ 1 - 18s + 2r + 3t &= 0 \\ -1 + 6s - 2r + 3t &= 0 \end{aligned}$$

  Si $r = 9s - 3/2t$ los valores de t que satisfacen $0 \leq 9s - 3/2t \leq 6s$ son los t pares que cumplen $2s \leq t \leq 4s$. El coeficiente de q^0 del polinomio $\left(\sum_{t=0}^{4s} q^{3t}\right)\left(\sum_{r=0}^{6s}(r+1)q^{-18s+2r}\right)$ es $\sum_{s}^{2s} 1 + 9s - 3k = 9/2s^2 + 11/2s + 1$.

  Si $r = 3s + 3/2t$ los valores de t que satisfacen $0 \leq 3s + 3/2t \leq 6s - 1$ son los t pares que cumplen $0 \leq t \leq 2s - 2$. El coeficiente de q^0 del polinomio $\left(\sum_{t=0}^{4s} q^{3t}\right)\left(\sum_{r=0}^{6s+2}(r+1)q^{6s-2r}\right)$ es $\sum_{0}^{s-1} 1 + 3s + 3k = 9/2s^2 - 1/2s$.

  Si $r = -1/2 + 9s - 3/2t$ los valores de t que satisfacen $0 \leq -1/2 + 9s - 3/2t \leq 6s - 1$ son los t impares que cumplen $2s+1 \leq t \leq 4s-1$. El coeficiente de q^0 del polinomio $\left(\sum_{t=0}^{4s} q^{3t}\right)\left(\sum_{r=0}^{6s+2}(r+1)q^{1-18s+2r}\right)$ es $\sum_{s}^{2s-1} -1 + 9s - 3k = 9/2s^2 + 1/2s$.

  Si $r = -1/2 + 3s + 3/2t$ los valores de t que satisfacen $0 \leq -1/2 + 3s + 3/2t \leq 6s - 1$ son los t impares que cumplen

$1 \le t \le 2s-1$. El coeficiente de q del polinomio $\left(\sum_{t=0}^{4s} q^{3t}\right)\left(\sum_{r=0}^{6s+2}(r+1)q^{-1+6s-2r}\right)$ es $\sum_0^{s-1} 2+3s+3k = 9/2s^2+1/2s$.

Por lo tanto el coeficiente de q^0 del polinomio f es $18s^2+6s+1$.

- Cálculo del coeficiente de q.
  Para cada $0 \le t \le 4s$ se necesita encontrar los valores de r con $0 \le r \le 6s$ tal que
  $$-18s+2r+3t = 1$$
  y los valores de r con $0 \le r \le 6s-1$ tal que
  $$\begin{aligned} 6s-2r+3t &= 1 \\ 1-18s+2r+3t &= 1 \\ -1+6s-2r+3t &= 1 \end{aligned}$$

  Si $r = 1/2+9s-3/2t$ los valores de t que satisfacen $0 \le 1/2+9s-3/2t \le 6s$ son los t impares que cumplen $2s+1 \le t \le 4s-1$. El coeficiente de q del polinomio $\left(\sum_{t=0}^{4s} q^{3t}\right)\sum_{r=0}^{6s}(r+1)q^{-18s+2r}$ es $\sum_s^{2s-1} 9s-3t = 9/2s^2+3/2s$.

  Si $r = -1/2+3s+3/2t$ los valores de t que satisfacen $0 \le -1/2+3s+3/2t \le 6s-1$ son los t impares que cumplen $1 \le t \le 2s-1$. El coeficiente de q del polinomio $\left(\sum_{t=0}^{4s} q^{-18s+3t}\right)\sum_{r=0}^{6s+2}(r+1)q^{6s-2r}$ es $\sum_1^s -1+3s+3k = 9/2s^2+1/2s$.

  Si $r = +9s-3/2t$ los valores de t que satisfacen $0 \le +9s-3/2t \le 6s-1$ son los t pares que cumplen $2s+2 \le t \le 4s$. El coeficiente de q del polinomio $\left(\sum_{t=0}^{4s} q^{3t}\right)\sum_{r=0}^{6s+2}(r+1)q^{1-18s+2r}$ es $\sum_{s+1}^{2s} 1+9s-3k = 9/2s^2-1/2s$.

  Si $r = -1+3s+3/2t$ los valores de t que satisfacen $0 \le -1+3s+3/2t \le 6s-1$ son los t pares que cumplen $0 \le t \le 2s$. El coeficiente de q del polinomio $\left(\sum_{t=0}^{4s} q^{3t}\right)\sum_{r=0}^{6s+2}(r+1)q^{-1+6s-2r}$ es $\sum_0^s 3s+3k = 9/2s^2+9/2s$.

  Por lo tanto el coeficiente de q del polinomio f es $18s^2+6s$.

II) Sea $h = 3s + 1$

$$f(q) = q^{-6-18s}\frac{(1-q^{12s+7})(1-q^{12s+6})(1-q^{12s+5})}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)} =$$

$$q^{-6-18s}\left(\sum_{t=0}^{2s-1} q^{6t+2} - \sum_{t=0}^{2s-1} q^{6t+1} + \sum_{t=0}^{2s-1} q^{6t}\right)$$

$$\left(\sum_{r=0}^{12s+4}(r+1)q^r + (12s+5)q^{12s+5} + \sum_{r=0}^{12s+4}(r+1)q^{24s+10-r}\right) =$$

$$q^{-6-18s}\left(q^2-q+1\right)\left(\sum_{t=0}^{2s} q^{6t}\right)$$

$$\left(\sum_{r=0}^{12s+4}(r+1)q^r + (12s+5)q^{12s+5} + \sum_{r=0}^{12s+4}(r+1)q^{24s+10-r}\right) =$$

$$\left(\sum_{t=0}^{2s} q^{6t}\right)\left(\sum_{r=0}^{12s+4}(r+1)q^{-4-18s+r} + (12s+5)q^{1-6s} + \sum_{r=0}^{12s+4}(r+1)q^{6+6s-r}\right.$$
$$- \sum_{r=0}^{12s+4}(r+1)q^{-5-18s+r} - (12s+5)q^{-6s} - \sum_{r=0}^{12s+4}(r+1)q^{5+6s-r}$$
$$\left. + \sum_{r=0}^{12s+4}(r+1)q^{-6-18s+r} + (12s+5)q^{-1-6s} + \sum_{r=0}^{12s+4}(r+1)q^{4+6s-r}\right)$$

Sea

$$p(q) = \sum_{r=0}^{12s+4}(r+1)q^{-4-18s+r} + (12s+5)q^{1-6s} + \sum_{r=0}^{12s+4}(r+1)q^{6+6s-r}$$
$$- \sum_{r=0}^{12s+4}(r+1)q^{-5-18s+r} - (12s+5)q^{-6s} - \sum_{r=0}^{12s+4}(r+1)q^{5+6s-r}$$
$$+ \sum_{r=0}^{12s+4}(r+1)q^{-6-18s+r} + (12s+5)q^{-1-6s} + \sum_{r=0}^{12s+4}(r+1)q^{4+6s-r}$$

$$q^{6t}p(q) = \sum_{r=0}^{12s+4}(r+1)q^{-4-18s+r+6t} + (12s+5)q^{1-6s+6t} + \sum_{r=0}^{12s+4}(r+1)q^{6+6s-r+6t}$$
$$- \sum_{r=0}^{12s+4}(r+1)q^{-5-18s+r+6t} - (12s+5)q^{-6s+6t} - \sum_{r=0}^{12s+4}(r+1)q^{5+6s-r+6t}$$
$$+ \sum_{r=0}^{12s+4}(r+1)q^{-6-18s+r+6t} + (12s+5)q^{-1-6s+6t} + \sum_{r=0}^{12s+4}(r+1)q^{4+6s-r+6t}$$

Se quiere calcular el coeficiente de q^0 y q de f.

- Cálculo del coeficiente de q^0.
  Para cada $0 \le t \le 2s$ se necesita encontrar los valores de r con $0 \le r \le 12s{+}4$

tal que

$$\begin{aligned}
-4-18s+r+6t &= 0\\
1-6s+6t &= 0\\
6+6s-r+6t &= 0\\
-5-18s+r+6t &= 0\\
-6s+6t &= 0\\
5+6s-r+6t &= 0\\
-6-18s+r+6t &= 0\\
-1-6s+6t &= 0\\
4+6s-r+6t &= 0
\end{aligned}$$

Si $r=4+18s-6t$ los valores t para los cuales $0\leq 4+18s-6t\leq 12s+4$, son $s\leq t\leq 2s$.
Si $r=5+18s-6t$, $r=6+18s-6t$ los valores t para los cuales
$0\leq 5+18s-6t\leq 12s+4$ y $0\leq 6+18s-6t\leq 12s+4$, son $s+1\leq t\leq 2s$.
El coeficiente de q^0 del polinomio

$$\left(\sum_{t=0}^{2s} q^{6t}\right)\left(\sum_{r=0}^{12s+4}(r+1)\left(q^{-4-18s+r}-q^{-5-18s+r}+q^{-6-18s+r}\right)\right)$$

es $\sum_{t=s}^{2s} 5+18s-6t+\sum_{t=s+1}^{2s} 1 = 9s^2+15s+4$.

Si $r=6+6s+6t, r=5+6s+6t$, los valores t para los cuales
$0\leq 6+6s+6t\leq 12s+4, 0\leq 5+6s+6t\leq 12s+4$ son $0\leq t\leq s-1$.
Si $r=4+6s+6t$ los valores t para los cuales $0\leq 4+6s+6t\leq 12s+4$, son $0\leq t\leq s$. El coeficiente de q^0 del polinomio

$$\left(\sum_{t=0}^{2s-1} q^{6t}\right)\left(\sum_{r=0}^{12s+4}(r+1)\left(q^{6+6s-r}q^{5+6s-r}+q^{4+6s+r}\right)\right)$$

es $\sum_{t=0}^{s-1} 1+\sum_{t=0}^{s} 5+6s+6t = 9s^2+15s+5$.

No existe ningún valor de t para el cual $1-6s+6t=0, -1-6s+6t=0$. Si $t=s$ entonces $-6s+6t=0$

Por lo tanto el coeficiente de q^0 del polinomio f es $9s^2+15s+4-12s-5+9s^2+15s+5=18s^2+18s+5$.

- Cálculo del coeficiente de q.
  Para cada $0\leq t\leq 2s$ se necesita encontrar los valores de r con $0\leq r\leq 12s+4$

tal que

$$\begin{aligned}
-4-18s+r+6t &= 1\\
1-6s+6t &= 1\\
6+6s-r+6t &= 1\\
-5-18s+r+6t &= 1\\
-6s+6t &= 1\\
5+6s-r+6t &= 1\\
-6-18s+r+6t &= 1\\
-1-6s+6t &= 1\\
4+6s-r+6t &= 1
\end{aligned}$$

Si $r = 5+18s-6t$, $r = 6+18s-6t$ $r = 7+18s-6t$ los valores t para los cuales
$0 \le 5+18s-6t \le 12s+4, 0 \le 6+18s-6t \le 12s+4$, $0 \le 7+18s-6t \le 12s+4$ son $s+1 \le t \le 2s$. El coeficiente de q del polinomio

$$\left(\sum_{t=0}^{2s} q^{6t}\right)\left(\sum_{r=0}^{12s+4}(r+1)\left(q^{-4-18s+r} - q^{-5-18s+r} + q^{-6-18s+r}\right)\right)$$

es $\sum_{t=s+1}^{2s} 7+18s-6t + \sum_{t=s+1}^{2s} 1 = 9s^2+4s$.

Si $r = 4+6s+6t, r = 3+6s+6t$, los valores t para los cuales
$0 \le 4+6s+6t \le 12s+4, 0 \le 3+6s+6t \le 12s+4$ son $0 \le t \le s$.
Si $r = 5+6s+6t$ los valores t para los cuales $0 \le 5+6s+6t \le 12s+4$, son $0 \le t \le s-1$. El coeficiente de q del polinomio

$$\left(\sum_{t=0}^{2s-1} q^{6t}\right)\left(\sum_{r=0}^{12s+4}(r+1)\left(q^{6+6s-r}q^{5+6s-r} + q^{4+6s+r}\right)\right)$$

es $\sum_{t=0}^{s}(-1) + \sum_{t=0}^{s-1} 6+6s+6t = 9s^2+2s-1$.

No existe ningún valor de t para el cual $-6s+6t = 1, -1-6s+6t = 0$. Si $t = s$ entonces $1-6s+6t = 1$

Por lo tanto el coeficiente de q del polinomio f es $9s^2+4s+12s+5+9s^2+2s-1 = 18s^2+18s+4$.

En consecuencia $c_0^3 - c_2^3 = 1$ y por el Teorema 5.2.1y por inciso 2 de este corolario $\dim H_3(b_n) = (c_0^3 - c_2^3) + (c_0^3 - c_2^3) = 1$, si $n = 12s+6$.

III) Sea $h = 3s+2$

$$f(q) = q^{-18s-12}\frac{(1-q^{12s+11})(1-q^{12s+10})(1-q^{12s+9})}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)} =$$

$$q^{-18s-12}\left(\sum_{r=0}^{12s+10} q^r\right)\left(\sum_{r=0}^{6s+4} q^{2r}\right)\left(\sum_{r=0}^{4s+2} q^{3r}\right) =$$

$$\left(\sum_{t=0}^{4s+2} q^{3t}\right)\left(\sum_{r=0}^{6s+4}(r+1)\left(q^{-18s-12+2r} + q^{6s+6-2r} + q^{-18s-12+2r+1}\right) + \sum_{r=0}^{6s+3}(r+1)q^{6s+6-2r-1}\right)$$

Sea

$$p(q) = \sum_{r=0}^{6s+4} (r+1) \left(q^{-18s-12+2r} + q^{6s+6-2r} + q^{-18s-11+2r}\right) + \sum_{r=0}^{6s+3} (r+1) q^{6s+5-2r}$$

$$q^{3t} p(q) = \sum_{r=0}^{6s+4} (r+1) \left(q^{-18s-12+2r+3t} + q^{6s+6-2r+3t} + q^{-18s-11+2r+3t}\right) + \sum_{r=0}^{6s+3} (r+1) q^{6s+5-2r+3t}$$

Se quiere calcular el coeficiente de q^0 y q de f.

- Cálculo del coeficiente de q^0.
  Para cada $0 \leq t \leq 4s+2$ se necesita encontrar los valores de r con $0 \leq r \leq 6s+4$ tal que

$$\begin{aligned} -18s - 12 + 2r + 3t &= 0 \\ 6s + 6 - 2r + 3t &= 0 \\ -18s - 11 + 2r + 3t &= 0 \end{aligned}$$

  y los valores de r con $0 \leq r \leq 6s+3$ tal que

$$6s + 5 - 2r + 3t = 0$$

  Si $r = 9s+6+3/2t$ los valores de t que satisfacen $0 \leq 9s+6+3/2t \leq 6s+4$ son los t pares que cumplen $2s+2 \leq t \leq 4s+2$. El coeficiente de q^0 del polinomio $\left(\sum_{t=0}^{4s+2} q^{3t}\right) \sum_{r=0}^{6s+4} (r+1) q^{-18s-12+2r}$ es $\sum_{s+1}^{2s+1} 7+9s-3t = 9/2s^2 + 17/2s + 4$.

  Si $r = 3+3s+3/2t$ los valores de t que satisfacen $0 \leq 3+3s+3/2t \leq 6s+4$ son los t pares que cumplen $0 \leq t \leq 2s$. El coeficiente de q^0 del polinomio $\left(\sum_{t=0}^{4s+2} q^{3t}\right) \sum_{r=0}^{6s+2} (r+1) q^{6s+6-2r}$ es $\sum_{s}^{2s-1} 4+3s+3t = 9/2s^2 + 17/2s + 4$.

  Si $r = 11/2 + 9s - 3/2t$ los valores de t que satisfacen $0 \leq 11/2 + 9s - 3/2t \leq 6s+4$ son los t impares que cumplen $2s+1 \leq t \leq 4s+1$. El coeficiente de q^0 del polinomio $\left(\sum_{t=0}^{4s+2} q^{3t}\right) \sum_{r=0}^{6s+4} (r+1) q^{-18s-11+2r}$ es $\sum_{s}^{2s} 5 + 9s - 3t = 9/2s^2 + 19/2s + 5$.

  Si $r = 5/3+3s+3/2t$ los valores de t que satisfacen $0 \leq 5/3+3s+3/2t \leq 6s+3$ son los t impares que cumplen $1 \leq t \leq 2s-1$. El coeficiente de q^0 del polinomio $\left(\sum_{t=0}^{4s} q^{3t}\right) \sum_{r=0}^{6s+3} (r+1) q^{-18s-12+2r+1}$ es $\sum_{0}^{s-1} 5 + 3s + 3t = 9/2s^2 + 7/2s$.

  Por lo tanto el coeficiente de q^0 del polinomio $\left(\sum_{t=0}^{4s+2} q^{3t}\right) p(q)$ es $18s^2 + 30s + 13$.

- Cálculo del coeficiente de q.
  Para cada $0 \leq t \leq 4s+2$ se necesita encontrar los valores de r con $0 \leq r \leq 6s+4$ tal que

$$\begin{aligned} -18s - 12 + 2r + 3t &= 1 \\ 6s + 6 - 2r + 3t &= 1 \\ -18s - 11 + 2r + 3t &= 1 \end{aligned}$$

y los valores de r con $0 \leq r \leq 6s+3$ tal que

$$6s + 5 - 2r + 3t = 1$$

Si $r = 9s + 13/2 - 3/2t$ los valores de t que satisfacen $0 \leq 9s+13/2-3/2t \leq 6s+4$ son los t impares que cumplen $2s+3 \leq t \leq 4s+1$. El coeficiente de q del polinomio $\left(\sum_{t=0}^{4s+2} q^{3t}\right)\left(\sum_{r=0}^{6s+4}(r+1)q^{-18s-12+2r}\right)$ es $\sum_{s}^{2s-1} 3 + 9s - 3t = 9/2s^2 + 9/2s$.

Si $r = 5/2 + 3s + 3/2t$ los valores de t que satisfacen $0 \leq 5/2 + 3s + 3/2t \leq 6s + 4$ son los t impares que cumplen $1 \leq t \leq 2s + 1$. El coeficiente de q del polinomio $\left(\sum_{t=0}^{4s+2} q^{3t}\right)\left(\sum_{r=0}^{6s+2}(r+1)q^{6s+6-2r}\right)$ es $\sum_{0}^{s} 5 + 3s + 3t = 9/2s^2 + 19/2s + 5$.

Si $r = 6 + 9s - 3/2t$ los valores de t que satisfacen $0 \leq 6 + 9s - 3/2t \leq 6s + 4$ son los t pares que cumplen $2s + 2 \leq t \leq 4s + 2$. El coeficiente de q $\left(\sum_{t=0}^{4s+2} q^{3t}\right)\left(\sum_{r=0}^{6s+4}(r+1)q^{-18s-11+2r}\right)$ del polinomio es $\sum_{s+1}^{2s+1} 7 + 9s - 3t = 9/2s^2 + 17/2s + 4$.

Si $r = 2+3s-3/2t$ los valores de t que satisfacen $0 \leq 2+3s-3/2t \leq 6s+3$ son los t pares que cumplen $0 \leq t \leq 2s$. El coeficiente de q del polinomio $\left(\sum_{t=0}^{4s} q^{3t}\right)\left(\sum_{r=0}^{6s+3}(r+1)q^{-18s-12+2r+1}\right)$ es $\sum_{0}^{s} 3 + 3s + 3t = 9/2s^2 + 15/2s + 3$.

Por lo tanto el coeficiente de q del polinomio $\left(\sum_{t=0}^{4s+2} q^{3t}\right) p(q)$ es $18s^2 + 30s + 12$.

En consecuencia $c_0^3 - c_2^3 = 1$ y por el Teorema 5.2.1y por inciso 2 de este corolario $\dim H_3(b_n) = (c_0^3 - c_2^3) + (c_0^3 - c_2^3) = 1$, si $n = 12s + 10$.

- Sea $n = 4h + 3$, en este caso n, k son impares por la Observación 5.2.2 y por inciso 3) de este corolario $\dim H_3(b_n) = 1$.

Conclusión : $\dim H_3(b_n) = 1$ para todo n que no es múltiplo de 4.

□

Nos interesa saber la dimensión total de la homolgía de $\mathfrak{b}_n$. Por el teorema 5.2.1 sabemos que

$$\dim H_*(\mathfrak{b}_n) = 2\,\alpha_0(\bigwedge V_n) = 2(C_0 - C_2)$$

donde C_r es el coeficiente de q^r en

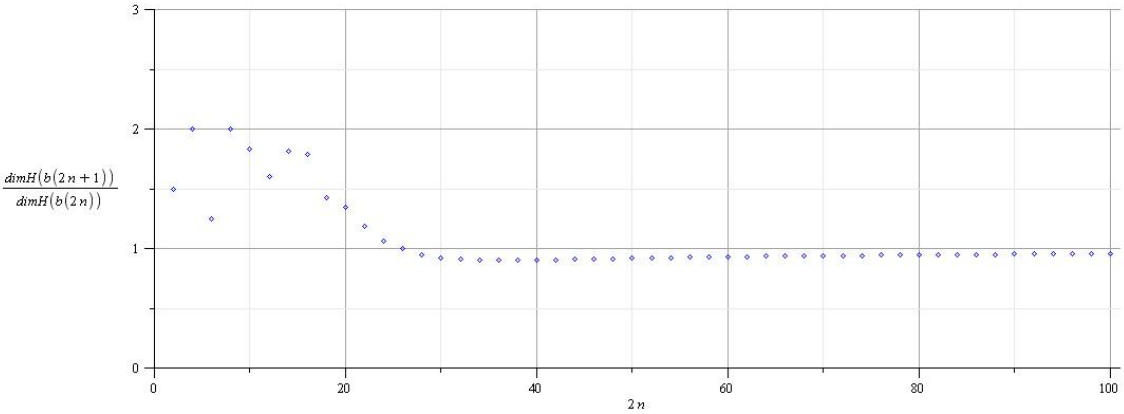
$$ch_{\bigwedge V_n} = \sum_{k=0}^{n+1} q^{k^2-(n+1)k} \binom{n+1}{k}_{q^2}.$$

Se puede probar que esta suma da

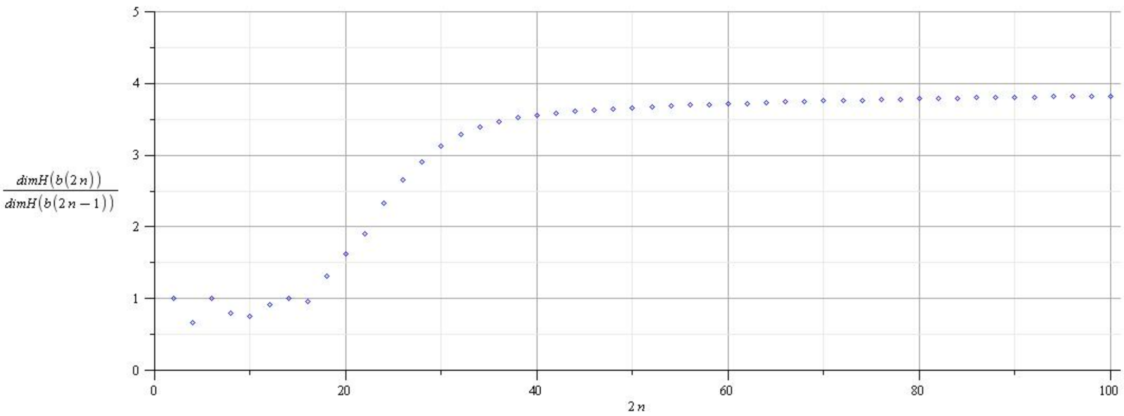
$$ch_{\bigwedge V_n} = \begin{cases} 2\dfrac{(1+q^2)^2(1+q^4)^2\dots(1+q^n)^2}{q^{\frac{n(n+2)}{4}}}, & \text{si } n \text{ es par} \\[2ex] \dfrac{(1+q^1)^2(1+q^3)^2\dots(1+q^n)^2}{q^{\frac{(n+1)^2}{4}}}, & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Con esta fórmula hemos analizado la función $d(n) = \dim H_*(\mathfrak{b}_n)$ y observamos lo siguiente:

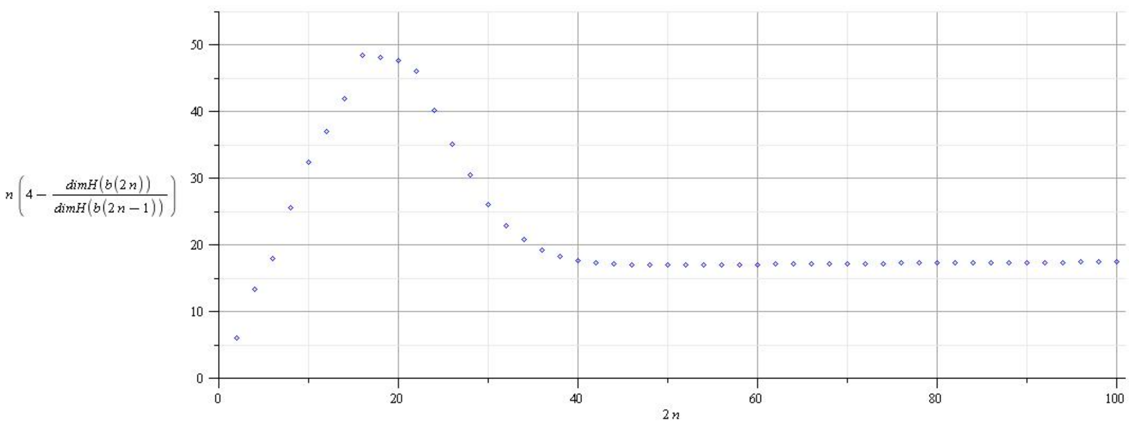
1. $d(2n+1)/d(2n)$ es asintótica a 1, como muestra el siguiente gráfico.



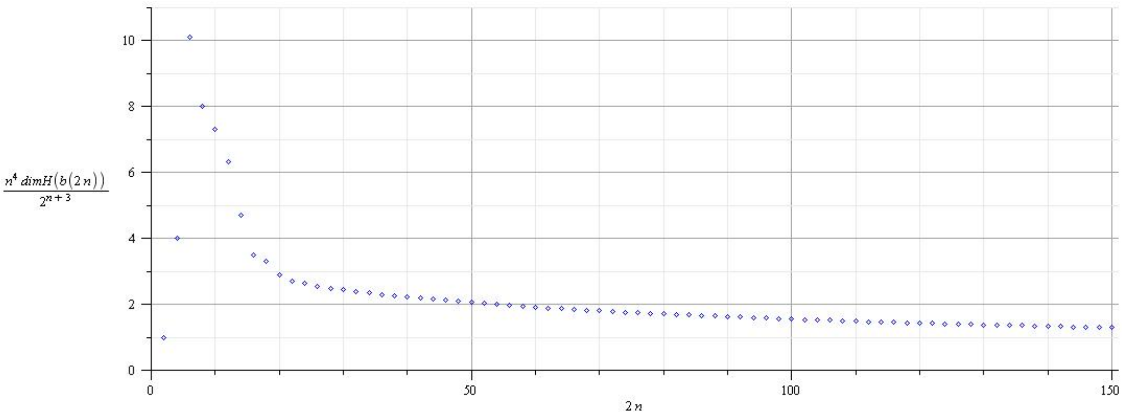
2. $d(2n)/d(2n-1)$ es asintótica a 4, como muestra el siguiente gráfico.



3. Un poco más finamente, nos parece que $n(4 - \frac{d(2n)}{d(2n-1)})$ es asintótica a 18, como muestra el siguiente gráfico.



4. Estos comportamientos nos hacen suponer que la proporción de la homología sobre el total del álgebra exterior, es decir $\frac{d(n)}{2^{n+3}}$, es del orden n^4 como muestra el siguiente gráfico.


$\frac{n^4\, dimH(b(2n))}{2^{n+3}}$
$2n$
0
2
4
6
8
10
0
50
100
150

Bibliografía

[1] Bott R., Homogeneous vector bundles, Ann. Math. 66(2) (1957), 203-248.

[2] Karin Erdmann and Mark J, Wildon*Introduction to Lie Algebras*,Springer Undergraduate Mathematics Series. Springer Verlag, 2006.

[3] Humphreys James E.*Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, Graduate Texts in Mathematics 9. Springer Verlag, 1994.

[4] Kostant B., Lie algebra cohomology and the generalized Borel-Weil theorem, Ann. of Math. 74 (1961), 329-387.

[5] Nomizu K., On the cohomology of compact homogeneous spaces of nilpotent Lie groups, Ann. of Math. 59 (1954), 531-538.

[6] Luiz A. B. San Martin*Algebras de Lie*, Editora Da Unicamp 1999 Universidade Estdual de Campinas

[7] Stanley, R. *Enumerative Combinatorics*, Volume 1, Cambridge University Press,1997.

[8] Springer, T.A*Invariant Theory*, Lecture Notes in Mathematics, Vol.585, Springer-Verlag, 1977.

[9] Manivel, L*An extension of the Cayley-Sylvester formula*, European Journal of Combinatorics 28 (2007) 1839-1842

[10] Stanley, R. *Enumerative Combinatorics*, Volume 1, Cambridge University Press,1997.

[11] Kostant, B. *Lie algebra cohomology and the generalized Borel-Weil theorem*, Ann. of Math. (2) **74**, (1961) 329–387.

[12] Manivel, L*An extension of the Cayley-Sylvester formula*, European Journal of Combinatorics 28 (2007) 1839-1842

[13] Eugene Mukhin*Symmetric Polynomials and Partitions*