

UNIVERSIDAD NACIONAL DE SALTA
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS
TESIS MAESTRÍA EN MATEMÁTICA APLICADA

Título: COHOMOLOGIA DE ÁLGEBRAS DE LIE 3-PASOS
NILPOTENTES GRADUADAS Y LA CONJETURA DEL
RANGO TORAL

Tesista: Mónica Nancy Cruz

Director: Dr. Leandro Roberto Cagliero

Codirectora: Mag. Dolores Alía Aponte de Saravia

5 de diciembre de 2011

Agradecimientos

En primer lugar deseo expresar mi agradecimiento al director de esta tesis de maestría, Leandro Cagliero, por su gran capacidad matemática, entusiasmo, calidez y generosidad, por la dedicación y apoyo que ha brindado a este trabajo y por el respeto a mis ideas, lo que se tradujo en que su realización sea para mí algo provechoso, interesante y ameno. Deseo que también lo sea para todos aquellos que accedan a su lectura.

Pero un trabajo de investigación es también fruto del reconocimiento y del apoyo vital que nos ofrecen las personas que nos estiman, sin el cual no tendríamos la fuerza y energía que nos anima a crecer como personas y como profesionales.

Es por ello que expreso un agradecimiento muy especial a mis compañeros de trabajo del Departamento de Matemática, por su apoyo personal, profesional y humano y en particular, a mi colega y amiga Elda Canterle con quien he compartido proyectos e ilusiones durante tantos años, a mi codirectora y gran formadora Dolores Alía y a todos mis amigos del departamento que con su calidez y comprensión me alentaron en este proyecto. Sería injusto no mencionar a Luis Cardón, con quien tuve el agrado de trabajar en varios proyectos de investigación, lo que ayudó sin duda, a mi crecimiento profesional.

Esta joven Maestría se debe al trabajo y la comprometida gestión de muchos colegas e instituciones, como el FAMAF, UBA, la Universidad de Santa Fe, etc. y en particular, a las autoridades de Facultad de Ciencias Exactas que brindaron su apoyo en todo momento y por lo que les estaré siempre muy agradecida. Sin dejar de reconocer a ninguno de ellos personalmente, sería injusto no destacar el activo rol de Nena Díaz, Camilo Jadur, Jorge Yazlle que contribuyeron tan generosamente y con tanto entusiasmo en la realización de los cursos y en tantas otras gestiones.

Gracias a mi familia, y en particular a mis queridos hijos, por su paciencia, comprensión y solidaridad con este proyecto, por el tiempo que me han concedido, un tiempo robado a la historia familiar. Sin su apoyo este trabajo nunca se habría escrito y, por eso, este trabajo es también el suyo.

Por último, es la Universidad Nacional de Salta, como institución, la gestora de toda mi formación y en la que escribí gran parte de mi historia de vida. Con ella tengo mi mayor compromiso y agradecimiento. Pero a las instituciones educativas las hacen los docentes y entonces no puedo dejar de nombrar a algunos matemáticos, a los que tuve más cerca desde mis inicios y que fueron mi grandes motivadores como Cristina Preti, Julio Bouillet, Miguel A. Carbajal, Carlos Finkel, Carlos Sastre, Dolores Alía, a tantos matemáticos de otras Universidades Nacionales, que con generosidad y sacrificio dictaron muchos cursos en Salta, así como, a los matemáticos de la UBA y FAMAF, que me recibieron con calidez y entusiasmo en mi estadía en estas universidades y contribuyeron indiscutiblemente en mi formación.

A todos, muchas gracias

Índice general

Agradecimientos	II
Introducción	2
1. Álgebras de Lie	5
1.1. Introducción a las Álgebras de Lie	5
1.1.1. Homomorfismos	7
1.1.2. Álgebras Solubles y Nilpotentes	10
1.2. Álgebras de Lie graduadas	13
2. Homología y cohomología de álgebras de Lie	16
2.1. Preliminares sobre álgebra homológica	16
2.2. Cohomología de álgebras de Lie	18
2.3. Homología de álgebras de Lie	21
3. CRT en álgebras de Lie 3-pasos nilpotentes graduadas	26
3.1. Introducción	26
3.2. Longitud del polinomio asociado a una graduación.	26
3.3. Álgebras de Lie 3-pasos graduadas	27
3.4. Problema abordado en la Tesis	32
4. Álgebras de Lie con polinomio corto	33
4.1. Introducción	33
4.2. Propiedades básicas de los números malos	33
4.3. La dimensión de las álgebras de Lie de polinomio corto	35
4.3.1. Existencia números malos	37
4.4. Existencia de álgebras de Lie de polinomio corto	38
4.4.1. Definición de la familia $\mathfrak{n}(n)$	38
4.4.2. Derivaciones de $\mathfrak{n}(n)$	41
4.4.3. Las álgebras de Lie $\mathfrak{n}(n)$ son de polinomio corto	47
Conclusiones y preguntas abiertas	49
Bibliografía	51

Introducción

En esta tesis estudiamos los conceptos básicos sobre cohomología y homología de álgebras de Lie y resolvemos un problema relacionado con la conjetura del rango toral, la cual establece una cota para la dimensión de homología de un álgebra de Lie nilpotente de dimensión finita.

Introducción al tema.

Dada un álgebra de Lie de dimensión finita \mathfrak{n} , la cohomología $H^*(\mathfrak{n})$ es la cohomología del siguiente complejo creciente de espacios vectoriales.

$$0 \rightarrow F_0(\mathfrak{n}) \xrightarrow{d_0} F_1(\mathfrak{n}) \xrightarrow{d_1} F_2(\mathfrak{n}) \xrightarrow{d_2} \dots \xrightarrow{d_{n-1}} F_n(\mathfrak{n}) \xrightarrow{d_n} 0$$

donde

$$F_k(\mathfrak{n}) = \{f : \mathfrak{n} \times \dots \times \mathfrak{n} \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ es multilineal y alternante}\}$$

son espacios vectoriales sobre el cuerpo \mathbb{C} de los números complejos, y

$$d_k : F_k(\mathfrak{n}) \rightarrow F_{k+1}(\mathfrak{n})$$

son las transformaciones lineales definidas por

$$d_k f(x_0, \dots, x_k) = \sum_{i < j} (-1)^{i+j+1} f([x_i, x_j], x_0, \dots, \widehat{x}_i, \dots, \widehat{x}_j, \dots, x_k)$$

las cuales satisfacen $d_{i+1} \circ d_i = 0$.

Originalmente, el interés en la cohomología de álgebras de Lie despertó, en parte, debido a dos resultados de gran importancia obtenidos en la década del 50 por Nomizu y Bott respectivamente. Estos resultados reducían problemas geométricos y topológicos al problema meramente algebraico de calcular la cohomología de ciertas álgebras de Lie asociadas al espacio geométrico o topológico en cuestión. Más precisamente:

1. En el año 1954 Nomizu (ver [No]) probó que los grupos de cohomología $H^*(X)$ de un espacio homogéneo compacto $X = N/\Gamma$, donde N es un grupo de Lie nilpotente conexo y semisimple y Γ es un subgrupo discreto, co-compacto de N , son canónicamente isomorfos a los grupos de cohomología $H^*(\mathfrak{n})$ del álgebra de Lie \mathfrak{n} de N .
2. En el año 1957 Bott (ver [Bo]) consigue expresar la cohomología $H^*(X, \varepsilon)$ de un espacio homogéneo compacto conexo y simplemente conexo X con coeficientes en el haz de secciones locales holomorfas de un fibrado vectorial homogéneo E sobre X , como el subespacio de invariantes bajo la acción de un subgrupo de automorfismos en los grupos de cohomología de ciertas álgebras de Lie relacionadas con X .

Desde ese momento, han aparecido numerosos trabajos de gran importancia dedicados al cálculo de la cohomología de álgebras de Lie. En la lista de referencias se pueden encontrar algunos de los que están más relacionados con este trabajo.

La cohomología de álgebras de Lie también tiene numerosas aplicaciones a la Física teórica. Algunos artículos recientes en esta dirección son [DDMST],[PA], [Pe].

El problema de calcular la cohomología de un álgebra de Lie dada, aún de dimensión finita, es generalmente difícil. Hay muchas conjeturas importantes abiertas y relativamente pocas familias de álgebras para las cuales se conozca en detalle su cohomología.

Conjetura del Rango Toral(CRT).

Hace más de 25 años Halperin [Hal] formuló una conjetura que hoy se conoce como Conjetura del Rango Toral (CRT). Una versión algebraica de ella es la siguiente.

CRT: Sea \mathfrak{n} un álgebra de Lie nilpotente de dimensión finita y sea \mathfrak{z} el centro de \mathfrak{n} , entonces

$$\dim(H^*(\mathfrak{n})) \geq 2^{\dim(\mathfrak{z})}.$$

Esta conjetura permanece abierta en general y sólo ha sido demostrada para ciertas clases de álgebras de Lie nilpotentes. Por ejemplo se sabe que es verdadera si \mathfrak{n} es 2-pasos nilpotente (ver [DS]), o si \mathfrak{n} es metabeliana split (ver [PT]).

Esta conjetura tiene origen en la geometría. El rango toral $r(X)$ de una variedad diferenciable X es la dimensión del mayor toro que actúa en X libremente. Originalmente la conjetura afirma que la cohomología de la variedad X tiene dimensión mayor o igual a $2^{r(X)}$. Una nilvariedad compacta es una variedad diferenciable $X = N/\Gamma$, donde N es un grupo de Lie nilpotente conexo, simplemente conexo y co-compacto y Γ es un subgrupo discreto co-compacto de N . El rango toral de una nilvariedad compacta es la dimensión del centro del álgebra de Lie de N . Por otro lado, el teorema de Nomizu afirma que la cohomología de la variedad X es igual a la cohomología $H^*(\mathfrak{n})$ del álgebra de Lie \mathfrak{n} . De este modo la conjetura original para nilvariedades compactas es equivalente a la versión algebraica de la CRT.

La CRT está también relacionada con problemas de otras áreas de la matemática como por ejemplo álgebra conmutativa y teoría de grupos, y existen diferentes formulaciones de ella.

Cuando el álgebra de Lie $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_1 \oplus \mathfrak{n}_2 \oplus \dots \oplus \mathfrak{n}_k$ es k -pasos nilpotente y graduada, con $d_i = \dim(\mathfrak{n}_i)$, se prueba en [T2] que

$$\dim(H^*(\mathfrak{n})) \geq L(p) \tag{1}$$

donde $p(x) = (1-x)^{d_1} \dots (1-x^k)^{d_k}$ y $L(p)$ es la suma de los valores absolutos de los coeficientes de p .

La CRT es verdadera para álgebras de Lie \mathfrak{n} 2-pasos nilpotentes; es una consecuencia inmediata del resultado anterior.

La CRT está abierta para las álgebras de Lie 3-pasos nilpotentes graduadas $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_1 \oplus \mathfrak{n}_2 \oplus \mathfrak{n}_3$.

Resultados obtenidos

Sea \mathfrak{n} un álgebra de Lie 3-pasos nilpotente de dimensión finita y sea \mathfrak{z} el centro de \mathfrak{n} . Diremos que \mathfrak{n} es de **polinomio largo** si admite una graduación $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_1 \oplus \mathfrak{n}_2 \oplus \mathfrak{n}_3$ tal que

$$L(p) \geq 2^{\dim(\mathfrak{z})},$$

donde $p = (1-x)^{d_1} (1-x^2)^{d_2} (1-x^3)^{d_3}$, con $d_i = \dim \mathfrak{n}_i$, es el polinomio asociado a la graduación. Diremos que \mathfrak{n} es de **polinomio corto** si no es de polinomio largo, es decir, si para toda graduación $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_1 \oplus \mathfrak{n}_2 \oplus \mathfrak{n}_3$ se cumple que $L(p) < 2^{\dim(\mathfrak{z})}$.

Observamos que, por (1), toda álgebra de Lie de polinomio largo cumple la CRT y por lo tanto los posibles contraejemplos a la CRT deben provenir de álgebras de Lie de polinomio corto.

Los principales objetivos de esta tesis son:

- (i) Encontrar cotas en la dimensión de \mathfrak{n} que aseguren que \mathfrak{n} es de polinomio largo.
- (ii) Encontrar alguna \mathfrak{n} de polinomio corto. Lo ideal sería encontrar alguna familia de álgebras de Lie 3-pasos nilpotentes de polinomio corto para buscar dentro de ella algún contraejemplo a la CRT.

Los resultados obtenidos son

- (i) En relación al objetivo (i):
 - . Demostramos en el Teorema 4.7 que si \mathfrak{n} es 3-pasos nilpotente graduada e indescomponible tal que $\dim(\mathfrak{n}) \leq 22$ entonces \mathfrak{n} es de polinomio largo. De este resultado se deduce que la CRT se cumple para toda álgebra de Lie 3-pasos nilpotente graduada (no necesariamente indescomponible) de dimensión menor o igual que 22.
 - . Además, verificamos computacionalmente que si $\dim(\mathfrak{n}) < 99$ entonces \mathfrak{n} es de polinomio largo (ver grafico en la Sección 4.3.1) y por lo tanto la CRT es verdadera para toda álgebra de Lie 3-pasos nilpotente graduada de dimensión menor que 100.
- (ii) En relación al objetivo (ii) construimos para cada natural n un álgebra de Lie 3-pasos nilpotente y graduada $\mathfrak{n}(n)$ tal que
 - . $\dim(\mathfrak{n}(n)) = 5 + \frac{(n+1)(n+6)}{2}$; $\dim(\mathfrak{z}) = \frac{(n+1)(n+4)}{2}$.
 - . Toda graduación $\mathfrak{n}_1 \oplus \mathfrak{n}_2 \oplus \mathfrak{n}_3$ de $\mathfrak{n}(n)$ satisface (ver Teorema 4.17)

$$\dim(\mathfrak{n}_1) = n + 3, \quad \dim(\mathfrak{n}_2) = 3 + \frac{n(n+1)}{2}, \quad \dim(\mathfrak{n}_3) = 2(n+1);$$

- . Para $n \geq 17$ $\mathfrak{n}(n)$ es de polinomio corto (ver Teorema 4.18) y para $n = 17$ resulta que

$$L(p) \approx 0,9 \times 2^{\dim \mathfrak{z}}.$$

En este caso $\dim(\mathfrak{n}(n)) = 212$ y $\dim \mathfrak{z} = 189$.

- . Computacionalmente observamos que el cociente $\frac{L(p)}{2^{\dim \mathfrak{z}}}$ decrece a medida que n crece, esto es, que tiende a cero cuando n tiende a infinito. Esto es que para todo $n \geq 17$, el álgebra de Lie $\mathfrak{n}(n)$ es de polinomio corto.

Organización de la tesis

En el Capítulo 1 se da una breve introducción de las álgebras de Lie, dando definiciones, ejemplos y resultados, en particular para álgebras de Lie nilpotentes y graduadas que serán utilizadas en los otros capítulos.

En el Capítulo 2 se presentan algunos resultados básicos de álgebra homológica, se define la homología y la cohomología de un álgebra de Lie y se muestra que para álgebras de Lie nilpotentes las dimensiones de la homología y de la cohomología coinciden.

En el Capítulo 3 estudiamos la CRT para álgebras de Lie nilpotentes y graduadas de dimensión finita. Presentamos algunos resultados básicos y demostramos la cota (1).

En el Capítulo 4 encontramos los resultados obtenidos de esta tesis y descritos anteriormente.

Capítulo 1

Álgebras de Lie

1.1. Introducción a las Álgebras de Lie

Definición 1.1. Sea F un cuerpo. Un álgebra de Lie \mathfrak{n} , sobre un cuerpo F es un F -espacio vectorial, junto con una aplicación bilineal, denominada corchete de Lie: $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{n} \times \mathfrak{n} \rightarrow \mathfrak{n}$ que satisface las siguientes propiedades

L1. $[x, x] = 0$ para todo $x \in \mathfrak{n}$.

L2. $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$ para todo $x, y, z \in \mathfrak{n}$.

El corchete de Lie $[x, y]$ se suele denominar como el conmutador de x e y . La condición 2 se conoce como Identidad de Jacobi.

Observación 1.2. De las propiedades anteriores resulta

$$[x, y] = -[y, x] \quad \text{para todo } x, y \in \mathfrak{n}$$

ya que, como $[\cdot, \cdot]$ es bilineal, aplicando la propiedad 1, tenemos

$$0 = [x + y, x + y] = [x, x] + [x, y] + [y, x] + [y, y] = [x, y] + [y, x].$$

Observación 1.3. De la bilinealidad de $[-, -]$, tenemos

1. $[v, 0] = 0 = [0, v]$ para todo $v \in \mathfrak{n}$.

2. Supongamos que $x, y \in \mathfrak{n}$ satisface $[x, y] \neq 0$ entonces x e y son linealmente independiente sobre F .

Ejemplos 1.4. Veamos algunos ejemplos de álgebra de Lie.

1. Sea $F = \mathbf{R}$. Sea $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$, . El producto vectorial $x \wedge y = (x_2y_3 - x_3y_2, x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1)$ define una estructura de álgebra de Lie en \mathbf{R}^3 .

2. Todo espacio vectorial V tiene un corchete de Lie definido por $[x, y] = 0$ para todo $x, y \in V$. Esto es una estructura de álgebra de Lie abeliana. En particular el cuerpo F puede ser mirado como un álgebra de Lie unidimensional.

3. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo F . Sea $\mathfrak{gl}(V)$ el conjunto de todas las transformaciones lineales de V en V , es un espacio vectorial sobre el cuerpo F definiendo las siguientes operaciones

- a) Sean $x, y \in \mathfrak{gl}(V)$, $(x + y)(v) = x(v) + y(v)$ para todo $v \in V$.
 b) Sean $x \in \mathfrak{gl}(V)$, $k \in F$, $(kx)(v) = kx(v)$ para todo $v \in V$.

Definimos en este espacio vectorial el corchete de Lie como

$$[x, y] = x \circ y - y \circ x \quad \text{para todo } x, y \in \mathfrak{gl}(V),$$

donde \circ denota la composición de funciones. Esta es el álgebra de Lie de las transformaciones lineales.

4. Sea F un cuerpo denotamos $\mathfrak{gl}(n, F)$ al espacio vectorial de todas las matrices $n \times n$ sobre el cuerpo F y definimos en este espacio el siguiente corchete de Lie

$$[x, y] = xy - yx \quad \text{para todo } x, y \in \mathfrak{gl}(n, F),$$

donde xy es el producto usual de matrices. (Es la versión matricial del álgebra de Lie del ejemplo 3).

5. Llamamos traza de una matriz cuadrada a la suma de los elementos de la diagonal. Sea $\mathfrak{sl}(n, F)$ el subespacio de $\mathfrak{gl}(n, F)$ que consiste de todas las matrices de traza cero. Resulta que para todo par de matrices x, y de traza cero, la matriz $xy - yx$ es una matriz de traza cero; por lo tanto el corchete $[x, y] = xy - yx$ define una estructura de álgebra de Lie sobre $\mathfrak{sl}(n, F)$.

6. Sea $\mathfrak{b}(n, F)$ el subespacio vectorial de todas las matrices triangulares superiores de $\mathfrak{gl}(n, F)$, (una matriz x se dice triangular superior si $x_{ij} = 0$ si $i > j$). $\mathfrak{b}(n, F)$ es un álgebra de Lie si definimos el corchete como en $\mathfrak{gl}(n, F)$.

De forma similar, sea $\mathfrak{n}(n, F)$ el subespacio vectorial de todas las matrices triangulares superiores estrictas de $\mathfrak{gl}(n, F)$, (una matriz x se dice triangular superior estricta si $x_{ij} = 0$ si $i \geq j$). $\mathfrak{n}(n, F)$ es un álgebra de Lie si definimos el corchete como en $\mathfrak{gl}(n, F)$.

Definición 1.5. (Subálgebra de Lie) Sea \mathfrak{n} un álgebra de Lie. Todo subespacio vectorial $K \subseteq \mathfrak{n}$ tal que

$$[x, y] \in K \quad \text{para todo } x, y \in K$$

es una subálgebra de Lie de \mathfrak{n} .

Ejemplos 1.6. Las álgebras definidas en los ejemplos 5 y 6 de Ejemplos 4, esto es, $\mathfrak{sl}(n, F)$, $\mathfrak{b}(n, F)$ y $\mathfrak{n}(n, F)$ son claramente subálgebras de Lie de $\mathfrak{gl}(n, F)$.

Definición 1.7. (Ideal). Sea \mathfrak{n} un álgebra de Lie. Todo subespacio vectorial $I \subseteq \mathfrak{n}$ tal que

$$[x, y] \in I \quad \text{para todo } x \in \mathfrak{n}, y \in I.$$

Ejemplos 1.8. $\mathfrak{sl}(n, F)$ es un ideal de $\mathfrak{gl}(n, F)$ y $\mathfrak{n}(n, F)$ es un ideal de $\mathfrak{b}(n, F)$.

Observación 1.9. Un ideal es siempre una subálgebra. La recíproca no es cierta, esto es una subálgebra no es siempre un ideal. Por ejemplo $\mathfrak{b}(n, F)$ es una subálgebra de $\mathfrak{gl}(n, F)$, pero para $n \geq 2$ $\mathfrak{b}(n, F)$ no es un ideal de $\mathfrak{gl}(n, F)$. Notar que $e_{11} \in \mathfrak{b}(n, F)$ y $e_{21} \in \mathfrak{gl}(n, F)$, sin embargo $[e_{11}, e_{21}] = e_{21} \notin \mathfrak{b}(n, F)$.

Si \mathfrak{n} un álgebra de Lie, \mathfrak{n} es un ideal de \mathfrak{n} . $\{0\}$ es también un ideal de \mathfrak{n} . Estos son llamados ideales triviales de \mathfrak{n} .

Un importante ejemplo de ideal de un álgebra de Lie \mathfrak{n} , que frecuentemente no es trivial es el centro de \mathfrak{n} .

Definición 1.10. (Centro del álgebra). Sea \mathfrak{n} un álgebra de Lie, denotamos el centro de \mathfrak{n} con $\mathfrak{z}(\mathfrak{n})$ y lo definimos

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{n}) := \{x \in \mathfrak{n} : [x, y] = 0 \text{ para todo } y \in \mathfrak{n}\}.$$

Observación 1.11. Sea \mathfrak{n} un álgebra de Lie, \mathfrak{n} es abeliana si y solo si $\mathfrak{z}(\mathfrak{n}) = \mathfrak{n}$.

1.1.1. Homomorfismos

Definición 1.12. (*Homomorfismo*). Si \mathfrak{n}_1 y \mathfrak{n}_2 son álgebras de Lie sobre un cuerpo F , decimos entonces que la aplicación $\varphi : \mathfrak{n}_1 \rightarrow \mathfrak{n}_2$ es un homomorfismo si φ es una aplicación lineal y

$$\varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)] \quad \text{para todo } x, y \in \mathfrak{n}_1.$$

Notar que el corchete en el primer miembro es el definido en \mathfrak{n}_1 , mientras que en el segundo miembro es el corchete definido en \mathfrak{n}_2 .

Definición 1.13. (*Isomorfismo*). Sea \mathfrak{n} un álgebra de Lie y $\varphi : \mathfrak{n}_1 \rightarrow \mathfrak{n}_2$ un homomorfismo, diremos que φ es un isomorfismo si y solo si φ es biyectiva.

Un ejemplo muy importante de homomorfismos es el homomorfismo adjunta.

Definición 1.14. (*Homomorfismo adjunta*). Si \mathfrak{n} es un álgebra de Lie definimos

$$ad : \mathfrak{n} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{n}),$$

tal que $(ad x)(y) := [x, y]$ para todo $x, y \in \mathfrak{n}$.

De la bilinealidad del corchete se sigue que la función $ad x : \mathfrak{n} \rightarrow \mathfrak{n}$ es lineal, además se puede chequear fácilmente que ad es un homomorfismo de álgebras de Lie, ya que sale inmediatamente de la identidad de Jacobi

$$ad([x, y]) = ad x \circ ad y - ad y \circ ad x \quad \text{para todo } x, y \in \mathfrak{n}.$$

Observación 1.15. El $Nu(ad) = \mathfrak{z}(\mathfrak{n})$.

Observación 1.16. Sea $\varphi : \mathfrak{n}_1 \rightarrow \mathfrak{n}_2$ un homomorfismo, entonces el $Nu(\varphi)$ es un ideal de \mathfrak{n}_1 y la $Im(\varphi)$ es una subálgebra de \mathfrak{n}_2 .

Álgebras

Definición 1.17. (*Álgebra*) Un álgebra sobre un cuerpo F es un espacio vectorial A sobre F junto con una aplicación bilineal de

$$\begin{aligned} A \times A &\rightarrow A \\ (x, y) &\mapsto xy \end{aligned}$$

Decimos que xy es el producto de x por y .

En particular las álgebras de Lie son álgebras que satisfacen las identidades (L1.) y (L2.). (en este caso denotamos el producto xy como $[x, y]$).

Definición 1.18. (*Álgebra asociativa*). Un álgebra A se dice asociativa si

$$(xy)z = x(yz) \quad \text{para todo } x, y, z \in A.$$

Definición 1.19. (*Álgebra unitaria*). Un álgebra se dice unitaria si existe un elemento 1_A en A tal que $1_A x = x = x 1_A$ para todo x no nulo en A .

Ejemplos 1.20. Veamos ejemplos de álgebras asociativas

1. $\mathfrak{gl}(V)$, el espacio vectorial de las transformaciones lineales de un espacio vectorial V , tiene la estructura de álgebra unitaria asociativa donde el producto es la composición de funciones.

2. Análogamente $\mathfrak{gl}(n, F)$ el espacio vectorial de las matrices $n \times n$ sobre el cuerpo F es un álgebra asociativa unitaria con el producto de matrices.

Entre las álgebras de Lie muchas no tienen estas dos propiedades. En particular tenemos el siguiente resultado

Sea \mathfrak{n} un álgebra de Lie. \mathfrak{n} es asociativa, esto es $[x, [y, z]] = [[x, y], z]$ para todo $x, y, z \in \mathfrak{n}$, si y solo si, para todo $a, b \in \mathfrak{n}$ el conmutador de $[a, b]$ vive en $\mathfrak{z}(\mathfrak{n})$.

Observación 1.21. Si A es un álgebra asociativa sobre F , entonces podemos definir una nueva operación bilineal $[-, -]$ en A por

$$[a, b] = ab - ba \quad \text{para todo } a, b \in A$$

entonces A con este corchete resulta un álgebra de Lie.

Las álgebras de Lie $\mathfrak{gl}(V)$ y $\mathfrak{gl}(n, F)$ son un caso especial de esta construcción.

Derivaciones

Definición 1.22. (Derivación). Sea A un álgebra sobre un cuerpo F . Una derivación D de A es una aplicación F -lineal $D : A \rightarrow A$ tal que

$$D(ab) = aD(b) + bD(a) \quad \text{para todo } a, b \in A.$$

Llamamos $Der A$ al conjunto de todas las derivaciones de A .

El conjunto $Der A$ es cerrado para la adición y la multiplicación por escalar y contiene la aplicación nula. Luego $Der A$ es un subespacio vectorial de $\mathfrak{gl}(A)$. Resulta también que $Der A$ es una subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(A)$, ya que si D y E son dos derivaciones entonces $[D, E] = D \circ E - E \circ D$ es también una derivación.

Notar que si D y E son dos derivaciones $D \circ E$ no siempre resulta una derivación.

Observación 1.23. Sea \mathfrak{n} un álgebra de Lie y se $x \in \mathfrak{n}$, entonces la aplicación $ad x : \mathfrak{n} \rightarrow \mathfrak{n}$ es una derivación de \mathfrak{n} ya que por la identidad de Jacobi

$$(ad x)[y, z] = [x, [y, z]] = [[x, y], z] + [y, [x, z]] = [(ad x)y, z] + [y, (ad x)z] \quad \text{para todo } y, z \in \mathfrak{n}.$$

Construcción de ideales

Sean I, J ideales de un álgebra de Lie \mathfrak{n} entonces

1. $I \cap J$ es un ideal de \mathfrak{n} .
2. $I + J = \{x + y : x \in I, y \in J\}$ es un ideal de \mathfrak{n} .
3. $[I, J] := \langle \{[x, y] : x \in I, y \in J\} \rangle$ (el subespacio generado por el conjunto $\{[x, y] : x \in I, y \in J\}$) es un ideal de \mathfrak{n} .

Cociente de Álgebras

Definición 1.24. (*Álgebra cociente*). Si I es un ideal de un álgebra de Lie \mathfrak{n} , en particular es un subespacio de \mathfrak{n} , consideramos las clases $z + I = \{z + x : x \in I\}$ para $z \in \mathfrak{n}$ y el subespacio vectorial cociente

$$\mathfrak{n}/I = \{z + I : z \in \mathfrak{n}\}.$$

Definimos en este nuevo espacio vectorial el corchete dado por

$$[w + I, z + I] := [w, z] + I.$$

(donde el corchete de la derecha de la igualdad es el corchete definido en \mathfrak{n}). \mathfrak{n}/I con este corchete resulta un álgebra de Lie que la llamamos álgebra cociente de \mathfrak{n} sobre I .

Veamos que este nuevo corchete está bien definido, esto es no depende del representante de la clase elegido. Supongamos que $w + I = w' + I$ y $z + I = z' + I$, entonces $(w - w') \in I$ y $(z - z') \in I$. Por la bilinealidad del corchete tenemos que

$$[w', z'] = [w + (w' - w), z + (z' - z)] = [w, z] + [w' - w, z] + [w, z' - z] + [w' - w, z' - z],$$

donde los tres últimos sumandos viven en I por ser un ideal. Entonces

$$[w' + I, z' + I] = [w, z] + I.$$

Probar que este corchete verifica ser un corchete de Lie sale de que está definido a través del corchete en \mathfrak{n} .

Podemos generalizar los teoremas de isomorfismos de espacios vectoriales a las álgebras de Lie.

Teorema 1.25. (*Teorema de Isomorfismos*).

a) Sea $\varphi : \mathfrak{n}_1 \rightarrow \mathfrak{n}_2$ un homomorfismo de álgebras de Lie. El $Nu(\varphi)$ es un ideal de \mathfrak{n}_1 y $Im(\varphi)$ una subálgebra de \mathfrak{n}_2 . Además

$$\mathfrak{n}_1/Nu(\varphi) \cong Im(\varphi).$$

b) Si I y J son ideales de un álgebra de Lie, entonces

$$(I + J)/J \cong I/(I \cap J).$$

c) Sean I y J son ideales de un álgebra de Lie \mathfrak{n} tal que $I \subseteq J$. Entonces J/I es un ideal de \mathfrak{n}/I y

$$(\mathfrak{n}/I)/(J/I) \cong \mathfrak{n}/J.$$

a), b) y c) son el primer, el segundo y el tercer teorema de isomorfismos respectivamente.

Ejemplos 1.26. Recordemos que la traza de una matriz cuadrada a la suma de los elementos de la diagonal. Fijamos un cuerpo F y consideremos la aplicación $tr : \mathfrak{gl}(n, F) \rightarrow F$, la cual asigna a cada matriz $n \times n$ su traza. Esta aplicación es un homomorfismo de álgebras de Lie, ya que si $x, y \in \mathfrak{gl}(n, F)$ entonces

$$\begin{aligned} tr([x, y]) &= tr(xy - yx) = tr(xy) - tr(yx) = 0, \\ [tr(x), tr(y)] &= tr(x)tr(y) - tr(y)tr(x) = 0. \end{aligned}$$

Aquí el primer corchete es en $\mathfrak{gl}(n, F)$ y el segundo en el álgebra de Lie F .

Esto nos dice además que tr no es sobreyectivo. El $Nu(tr) = \mathfrak{sl}(n, F)$ (el álgebra de Lie de las matrices $n \times n$ de traza cero). Aplicando el primer teorema de isomorfismo nos queda

$$\mathfrak{gl}(n, F)/\mathfrak{sl}(n, F) \cong F$$

Si describimos los elementos del cociente tenemos que la clase de $x + \mathfrak{sl}(n, F)$ consiste de todas las matrices $n \times n$ cuya traza es la $tr x$.

Correspondencia entre ideales

Sea I un ideal de un álgebra de Lie \mathfrak{n} . Existe una correspondencia biyectiva entre los ideales del álgebra cociente \mathfrak{n}/I y los ideales de \mathfrak{n} que contienen a I . Esta correspondencia es la siguiente.

Si J es un ideal de \mathfrak{n} que contiene a I , entonces J/I es un ideal de \mathfrak{n}/I . Inversamente si K es un ideal de \mathfrak{n}/I , definimos el conjunto $J := \{z \in \mathfrak{n} : z + I \in K\}$. Podemos chequear fácilmente de que J es un ideal de \mathfrak{n} y que $J \supset I$.

Ejemplos 1.27. Si \mathfrak{n} es un álgebra de Lie y sea I un ideal de \mathfrak{n} tal que el álgebra de Lie \mathfrak{n}/I es abeliana, entonces los ideales de \mathfrak{n}/I son los subespacios de \mathfrak{n}/I . Para cada uno de estos ideales le corresponde un ideal que contiene a I . Estos corresponderán con los subespacios de \mathfrak{n} que contienen a I .

1.1.2. Álgebras Solubles y Nilpotentes

Lema 1.28. Sea I un ideal de un álgebra de Lie \mathfrak{n} . Luego \mathfrak{n}/I es abeliano si y solo si I contiene al álgebra derivada \mathfrak{n}' . ($\mathfrak{n}' = [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]$).

Demostración. El álgebra \mathfrak{n}/I es abeliana si y solo si para cada $x, y \in \mathfrak{n}$ se tiene

$$[x + I, y + I] = [x, y] + I = I$$

o, equivalentemente, para todo $x, y \in \mathfrak{n}$, $[x, y] \in I$. Como I es un subespacio vectorial de \mathfrak{n} , esto es cierto si y solo si el espacio generado por los corchetes $[x, y]$ está contenido en I . Luego $[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}] = \mathfrak{n}' \subseteq I$. \square

Este lema nos dice que el álgebra derivada \mathfrak{n}' es el ideal más pequeño de \mathfrak{n} tal que el álgebra cociente resulta conmutativa.

Definición 1.29. (*Serie derivada*). Sea \mathfrak{n} un álgebra de Lie. Definimos la serie derivada de \mathfrak{n} , inductivamente

$$\mathfrak{n}^{(1)} = \mathfrak{n}' = [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}] \quad y \quad \mathfrak{n}^{(k)} = [\mathfrak{n}^{(k-1)}, \mathfrak{n}^{(k-1)}] \quad \text{para } k \geq 2.$$

Entonces se verifica

$$\mathfrak{n} \supseteq \mathfrak{n}^{(1)} \supseteq \mathfrak{n}^{(2)} \supseteq \dots$$

Notar que como el producto de ideales es un ideal, $\mathfrak{n}^{(k)}$ es un ideal de \mathfrak{n} (y no necesariamente un ideal de $\mathfrak{n}^{(k-1)}$).

Definición 1.30. (*Álgebra soluble*). El álgebra de Lie \mathfrak{n} se dice soluble si existe un $m \geq 1$ tal que $\mathfrak{n}^{(m)} = 0$.

El álgebra de las matrices triangulares superiores $\mathfrak{b}(n, F)$ y de las matrices triangulares superiores estrictas $\mathfrak{n}(n, F)$ son solubles, mientras que por ejemplo el álgebra $\mathfrak{sl}(2, F)$ no es soluble. Es fácil chequear en este caso que si $\mathfrak{n} = \mathfrak{sl}(n, F)$ entonces $\mathfrak{n}' = \mathfrak{n}$ y por lo tanto $\mathfrak{n}^{(m)} = \mathfrak{n}$ para todo $m \geq 1$. Si \mathfrak{n} es soluble, entonces la serie derivada de \mathfrak{n} da una “aproximación” de \mathfrak{n} por una serie finita de ideales tales que el cociente de \mathfrak{n} con ellos es abeliano. A continuación daremos una serie de resultados cuya demostración es fácil.

Lema 1.31. Si \mathfrak{n} es un álgebra de Lie con ideales

$$\mathfrak{n} = I_0 \supseteq I_1 \supseteq \dots \supseteq I_m = 0$$

Tales que I_{k-1}/I_k es un álgebra de Lie abeliana para $1 \leq k \leq m$, entonces \mathfrak{n} es soluble.

Lema 1.32. Sea \mathfrak{n} es un álgebra de Lie.

- Si \mathfrak{n} es soluble, entonces toda subálgebra y la imagen de todo homomorfismo de \mathfrak{n} son solubles.
- Si \mathfrak{n} tiene un ideal I tal que I y \mathfrak{n}/I son solubles entonces \mathfrak{n} es soluble.
- Si I y J son ideales solubles de \mathfrak{n} , entonces $I + J$ es un ideal soluble de \mathfrak{n} .

Corolario 1.33. Sea \mathfrak{n} un álgebra de Lie de dimensión finita. Existe un único ideal soluble de \mathfrak{n} que contiene a todos los ideales solubles de \mathfrak{n} .

Definición 1.34. (Radical) El mayor ideal soluble de un álgebra de Lie \mathfrak{n} se lo llama radical de \mathfrak{n} y se lo denota $\text{rad}(\mathfrak{n})$.

Definición 1.35. (Álgebra semisimple) Un álgebra de Lie \mathfrak{n} no nula se dice semisimple si no tiene ideales solubles no nulos o equivalentemente si el $\text{rad}(\mathfrak{n}) = 0$.

Lema 1.36. Si \mathfrak{n} es un álgebra de Lie, entonces el álgebra $\mathfrak{n}/\text{rad}(\mathfrak{n})$ es semisimple.

Álgebras Nilpotentes

Definición 1.37. (Serie Central Descendente). Definimos la serie central descendente de un álgebra de Lie \mathfrak{n} como la serie cuyos términos son

$$\mathfrak{n}^1 = \mathfrak{n}' = [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}] \quad \text{y} \quad \mathfrak{n}^k = [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}^{k-1}] \quad \text{para } k \geq 2$$

Entonces $\mathfrak{n} \supseteq \mathfrak{n}^1 \supseteq \mathfrak{n}^2 \supseteq \dots$. El. Como el producto de ideales es un ideal, \mathfrak{n}^k es también un ideal de \mathfrak{n} (y no justamente un ideal de \mathfrak{n}^{k-1}). La razón del nombre “serie central” viene de que $\mathfrak{n}^k/\mathfrak{n}^{k+1}$ está contenido en el centro de $\mathfrak{n}/\mathfrak{n}^{k+1}$.

Definición 1.38. (Álgebras nilpotentes). Un álgebra de Lie \mathfrak{n} se dice nilpotente si para algún $m \geq 1$ tenemos $\mathfrak{n}^m = 0$.

Ejemplos 1.39.

- Un ejemplo de un álgebra nilpotente es la de las matrices triangulares superiores estrictas $\mathfrak{n}(n, F)$.
- Un álgebra de Lie nilpotente es soluble. (Se prueba por inducción en k que $\mathfrak{n}^{(k)} \subseteq \mathfrak{n}^k$).
- Un ejemplo clásico de un álgebra que es soluble y no nilpotente es el álgebra de las matrices triangulares superiores $\mathfrak{b}(n, F)$ para $n \geq 2$.

Lema 1.40. Sea \mathfrak{n} un álgebra de Lie.

- Si \mathfrak{n} es nilpotente, entonces toda subálgebra de \mathfrak{n} es nilpotente.
- Si $\mathfrak{n}/\mathfrak{z}(\mathfrak{n})$ es nilpotente, entonces \mathfrak{n} es nilpotente.

Demostración. La parte a) sale claramente de la definición.

Para la parte b) podemos demostrarla por inducción probando que

$$(\mathfrak{n}/\mathfrak{z}(\mathfrak{n}))^k = (\mathfrak{n}^k + \mathfrak{z}(\mathfrak{n}))/\mathfrak{z}(\mathfrak{n}).$$

Como $(\mathfrak{n}/\mathfrak{z}(\mathfrak{n}))^m$ es cero, entonces \mathfrak{n}^m está contenido en $\mathfrak{z}(\mathfrak{n})$ y por lo tanto $\mathfrak{n}^{m+1} = 0$. □

Definición 1.41. (Álgebra simple). Un álgebra de Lie es simple si sus únicos ideales son los triviales. (\mathfrak{n} o 0).

Ejemplos 1.42. $\mathfrak{sl}(n, F)$ es un ejemplo de álgebra de Lie simple.

Representaciones de un álgebra de Lie

Definición 1.43. (*Representaciones de un álgebra de Lie*) Sea \mathfrak{n} un álgebra de Lie sobre el cuerpo F . Una representación de \mathfrak{n} es un homomorfismo de álgebra de Lie

$$\varphi : \mathfrak{n} \rightarrow \mathfrak{gl}(V),$$

donde V es un espacio vectorial sobre el cuerpo F de dimensión finita. En este caso decimos que V es un \mathfrak{n} -módulo.

Ejemplos 1.44. Veamos algunos ejemplos de representaciones.

1. (Representación adjunta). La aplicación

$$ad : \mathfrak{n} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{n}) \text{ tal que } ad(x)(y) = [x, y]$$

es un homomorfismo de álgebras de Lie, por lo tanto ad es una representación de \mathfrak{n} , con $V = \mathfrak{n}$.

2. (Representación natural). Si \mathfrak{n} es una subálgebra de $\mathfrak{gl}(V)$. La inclusión

$$i : \mathfrak{n} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$$

es trivialmente un homomorfismo de álgebras de Lie, por lo tanto es una representación de \mathfrak{n} .

3. (Representación trivial). Dada un álgebra de Lie \mathfrak{n} , tomando $V = F$, definimos $\rho(x)$ igual a la transformación nula para todo $x \in \mathfrak{n}$.

Definición 1.45. (*Módulo sobre un álgebra de Lie*). Sea \mathfrak{n} un álgebra de Lie sobre el cuerpo F . Un módulo de un álgebra de Lie \mathfrak{n} , o simplemente un \mathfrak{n} -módulo, es un espacio vectorial V finito sobre el cuerpo F junto con una aplicación

$$\begin{aligned} \mathfrak{n} \times V &\rightarrow V \\ (x, v) &\mapsto x \cdot v \end{aligned}$$

que cumple las siguientes propiedades

$$M1. (\lambda x + \mu y) \cdot v = \lambda(x \cdot v) + \mu(y \cdot v) \text{ para todo } x, y \in \mathfrak{n}, v \in V, y \lambda, \mu \in F.$$

$$M2. x \cdot (\lambda v + \mu w) = \lambda(x \cdot v) + \mu(x \cdot w) \text{ para todo } x \in \mathfrak{n}, v, w \in V, y \lambda, \mu \in F.$$

$$M3. [x, y] \cdot v = x \cdot (y \cdot v) - y \cdot (x \cdot v) \text{ para todo } x, y \in \mathfrak{n}, y v \in V.$$

Ejemplos 1.46. Si V es un espacio vectorial y \mathfrak{n} es un álgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(V)$, entonces V es un \mathfrak{n} -módulo, donde $x \cdot v$ es la imagen de v sobre la aplicación lineal x .

Notar que (M1.) y (M2.) son equivalentes a decir que la aplicación $(x, v) \mapsto x \cdot v$ es bilineal. La condición (M2.) implica que cada $x \in \mathfrak{n}$ es un endomorfismo lineal de V , ya que los elementos de \mathfrak{n} actúan en V por aplicaciones lineales. Veremos enseguida la importancia de (M3.).

Observación 1.47. Los módulos y las representaciones de álgebras de Lie son dos formas diferentes de describir una misma estructura.

Si tomamos una representación $\varphi : \mathfrak{n} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$, resulta que V es un \mathfrak{n} -módulo donde definimos

$$x \cdot v := \varphi(x)(v) \text{ para cada } x \in \mathfrak{n}, v \in V.$$

Demostrar esto, es equivalente a chequear que se cumplen los axiomas (M1.), (M2.) y (M3.).

M1. Tenemos, por linealidad de φ ,

$$(\lambda x + \mu y) \cdot v = \varphi(\lambda x + \mu y)(v) = \lambda\varphi(x)(v) + \mu\varphi(y)(v).$$

Por la definición de suma y multiplicación por escalares de funciones lineales tenemos que

$$\lambda\varphi(x)(v) + \mu\varphi(y)(v) = \lambda(x \cdot v) + \mu(y \cdot v).$$

M2. Del mismo modo

$$x \cdot (\lambda v + \mu w) = \varphi(x)(\lambda v + \mu w) = \lambda\varphi(x)(v) + \mu\varphi(x)(w) = \lambda(x \cdot v) + \mu(x \cdot w).$$

M3. Como φ es un homomorfismo de álgebras de Lie y de la definición

$$[x, y] \cdot v = \varphi([x, y])(v) = [\varphi(x), \varphi(y)](v).$$

Aplicando la definición del corchete en $\mathfrak{gl}(V)$ nos queda

$$[\varphi(x), \varphi(y)](v) = \varphi(x)(\varphi(y)(v)) - \varphi(y)(\varphi(x)(v)) = x \cdot (y \cdot v) - y \cdot (x \cdot v).$$

Inversamente, si V es un \mathfrak{n} , podemos pensar en V como una representación de \mathfrak{n} , definiendo

$$\varphi : \mathfrak{n} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$$

donde para cada $x \in \mathfrak{n}$, $\varphi(x)$ es la aplicación lineal $v \mapsto x \cdot v$.

1.2. Álgebras de Lie graduadas

En esta tesis estamos particularmente interesados en las álgebras de Lie 3-pasos nilpotentes y graduadas. A continuación daremos algunas definiciones y resultados que serán utilizados en el Capítulo 4.

Definición 1.48 (Álgebra de Lie graduadas). *Un álgebra de Lie \mathfrak{n} se dice \mathbb{Z} -graduada o graduada si admite una descomposición vectorial del tipo $\mathfrak{n} = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathfrak{n}_i$, donde los subespacios \mathfrak{n}_i verifican $[\mathfrak{n}_i, \mathfrak{n}_j] \subset \mathfrak{n}_{i+j}$.*

Las graduaciones que consideraremos son finitas, es decir, con un número finito de subespacios \mathfrak{n}_i no nulos.

Definición 1.49 (Álgebra de Lie indescomponible). *Un álgebra de Lie se dice indescomponible si no se puede escribir como la suma directa de dos ideales no triviales.*

Lema 1.50. *Sea $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_1 \oplus \mathfrak{n}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{n}_k$ un álgebra de Lie graduada. Entonces*

$$\mathfrak{z} = \mathfrak{z} \cap \mathfrak{n}_1 \oplus \mathfrak{z} \cap \mathfrak{n}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{z} \cap \mathfrak{n}_k.$$

Además, si \mathfrak{n} es indescomponible, $\mathfrak{z} \subset \mathfrak{n}'$.

Demostración. Sea $z = z_1 + \cdots + z_n$ y sea $x_i \in \mathfrak{n}_i$, $1 \leq i \leq k$. Entonces $0 = [z, x_i] = [z_1, x_i] + \cdots + [z_n, x_i]$ y como cada sumando está en distintos \mathfrak{n}_j , resulta $[z_1, x_i] = 0, \dots, [z_n, x_i] = 0$ para todo $x_i \in \mathfrak{n}_i$, $1 \leq i \leq k$. Luego $z_1, \dots, z_n \in \mathfrak{z}$. Si \mathfrak{n} es indescomponible, y suponiendo que existe $x \in \mathfrak{z} - \mathfrak{n}'$, elegimos $\tilde{\mathfrak{n}}$ un complemento directo de $\langle x \rangle$ en \mathfrak{n} que contenga a \mathfrak{n}' , es decir, $\mathfrak{n} = \langle x \rangle \oplus \tilde{\mathfrak{n}}$. Como $x \in \mathfrak{z}$, es claro que $\langle x \rangle$ es un ideal. Además, si $u \in \mathfrak{n}$ y $v \in \tilde{\mathfrak{n}}$, entonces $u = cx + \tilde{u}$ y $[u, v] = [\tilde{u}, v] \in \mathfrak{n}' \subset \tilde{\mathfrak{n}}$. Por lo tanto $\tilde{\mathfrak{n}}$ también es un ideal, lo que contradice que \mathfrak{n} es indescomponible. \square

Lema 1.51. Sea $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_1 \oplus \mathfrak{n}_2 \oplus \mathfrak{n}_3$ un álgebra de Lie 3-pasos nilpotente graduada e indescomponible. Se cumple

$$\mathfrak{z} = \mathfrak{n}_3 \oplus \mathfrak{z} \cap [\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_1].$$

Demostración. Claramente \mathfrak{n}_3 esta contenido en \mathfrak{z} . Por el lema anterior, $\mathfrak{z} \subset \mathfrak{n}'$, lo que implica que $\mathfrak{z} \cap \mathfrak{n}_1 = 0$ y $\mathfrak{z} \cap \mathfrak{n}_2 \subset \mathfrak{z} \cap [\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_1]$, con lo que el lema queda demostrado. \square

Lema 1.52. Sea $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_1 \oplus \mathfrak{n}_2 \oplus \mathfrak{n}_3$ un álgebra de Lie 3-pasos nilpotente graduada e indescomponible, se cumple

$$[\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2] = \mathfrak{n}_3$$

Demostración. Por definición 1.48 de álgebra de lie graduada resulta $[\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2] \subset \mathfrak{n}_3$.

Sea $\tilde{\mathfrak{n}}_3 = [\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2]$, y sea $\hat{\mathfrak{n}}_3$ un sumando directo de $\tilde{\mathfrak{n}}_3$ en \mathfrak{n}_3 , es decir $\mathfrak{n} = (\mathfrak{n}_1 \oplus \mathfrak{n}_2 \oplus \tilde{\mathfrak{n}}_3) \oplus \hat{\mathfrak{n}}_3$ como subespacios vectoriales.

$\mathfrak{n}_1 \oplus \mathfrak{n}_2 \oplus \tilde{\mathfrak{n}}_3$ es un ideal de \mathfrak{n} , ya que si $x \in \mathfrak{n}_1 \oplus \mathfrak{n}_2 \oplus \tilde{\mathfrak{n}}_3$ e $y \in \mathfrak{n}$, escribimos $x = x_1 + x_2 + x_3$ y $y = y_1 + y_2 + y_3$, con $x_i, y_i \in \mathfrak{n}_i$ para $i = 1, 2$, $x_3 \in \tilde{\mathfrak{n}}_3$ e $y_3 \in \mathfrak{n}_3$, así resulta $[x, y] = [x_1 + x_2 + x_3, y_1 + y_2 + y_3] = [x_1, y_1] + [x_1, y_2] + [x_2, y_1] \in \mathfrak{n}_2 \oplus \tilde{\mathfrak{n}}_3 \subset \mathfrak{n}_1 \oplus \mathfrak{n}_2 \oplus \tilde{\mathfrak{n}}_3$.

Además $\hat{\mathfrak{n}}_3$ es un ideal de \mathfrak{n} , ya que si $x \in \hat{\mathfrak{n}}_3 \subset \mathfrak{n}_3 \subset \mathfrak{z}$ entonces para todo $y \in \mathfrak{n}$, $[x, y] = 0$.

Como \mathfrak{n} es indescomponible resulta que $\hat{\mathfrak{n}}_3 = \{0\}$ y por lo tanto $[\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2] = \mathfrak{n}_3$. \square

Teorema 1.53. Sea \mathfrak{n} un álgebra de Lie. Entonces \mathfrak{n} es graduada de la forma $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_1 \oplus \mathfrak{n}_2 \oplus \dots \oplus \mathfrak{n}_k$, si y sólo si tiene una derivación diagonal con autovalores $1, 2, \dots, k$.

Más aún, toda derivación diagonalizable con autovalores $1, 2, \dots, k$ produce una graduación.

Demostración. Sea \mathfrak{n} un álgebra de Lie graduada, $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_1 \oplus \mathfrak{n}_2 \oplus \dots \oplus \mathfrak{n}_k$. Definimos $D : \mathfrak{n} \rightarrow \mathfrak{n}$ una transformación lineal tal que $D|_{\mathfrak{n}_i} = i \text{Id}$. Veamos que D es una derivación. Como D es una transformación lineal bastará probarlo para una base de \mathfrak{n} .

Para cada j con $j = 1, \dots, k$ sea $\{e_i^j\}_{i \in I_j}$, con $I_j = \{1, \dots, \dim(\mathfrak{n}_j)\}$, una base de \mathfrak{n}_j . Luego

$$\{e_i^j : j = 1, \dots, k, \text{ y } i \in I_j\}$$

es una base de \mathfrak{n} .

Por hipótesis $[e_i^j, e_l^s] \in \mathfrak{n}_{j+s}$. Por definición de D resulta

$$D([e_i^j, e_l^s]) = (j+s)[e_i^j, e_l^s], \quad D(e_i^j) = j e_i^j,$$

con $j, s = 1, \dots, k$, $i \in I_j$ y $l \in I_s$. Por lo tanto

$$D([e_i^j, e_l^s]) = (j+s)[e_i^j, e_l^s] = j[e_i^j, e_l^s] + s[e_i^j, e_l^s] = [j e_i^j, e_l^s] + [e_i^j, s e_l^s] = [D(e_i^j), e_l^s] + [e_i^j, D(e_l^s)],$$

de donde D resulta una derivación.

Recíprocamente, sea D una derivación diagonalizable de un álgebra de Lie \mathfrak{n} , con autovalores $1, 2, \dots, k$. Definimos \mathfrak{n}_i el autoespacio correspondiente al autovalor i . Esto es

$$\mathfrak{n}_i = \{x : Dx = ix\}$$

luego

$$\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_1 \oplus \mathfrak{n}_2 \oplus \dots \oplus \mathfrak{n}_k$$

con la propiedad que $[\mathfrak{n}_i, \mathfrak{n}_j] \subset \mathfrak{n}_{i+j}$, ya que si $x \in \mathfrak{n}_i$ e $y \in \mathfrak{n}_j$ como $D([x, y]) = [D(x), y] + [x, D(y)] = (i+j)[x, y]$ resulta $[x, y] \in \mathfrak{n}_{i+j}$.

Con esto que queda probado este teorema. \square

Lema 1.54. Sea \mathfrak{n} un álgebra de Lie. Si $D : \mathfrak{n} \rightarrow \mathfrak{n}$ es una derivación de \mathfrak{n} , entonces:

1. $D(\mathfrak{n}') \subset \mathfrak{n}'$.
2. $D([\mathfrak{n}, \mathfrak{n}']) \subset [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}']$.
3. $D(\mathfrak{z}(\mathfrak{n})) \subset \mathfrak{z}(\mathfrak{n})$.

Demostración.

1. Si $x \in \mathfrak{n}' = [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]$ entonces existen $y, z \in \mathfrak{n}$, tales que $x = [y, z]$. Luego $D(x) = D([y, z]) = [D(y), z] + [y, D(z)] \in [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}] = \mathfrak{n}'$.
2. Sea $u \in \mathfrak{n}$ y $x \in \mathfrak{n}'$ entonces $D([u, x]) = [D(u), x] + [u, D(x)] \in [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}']$, puesto que $[D(u), x] \in [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}']$ y $[u, D(x)] \in [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}']$ por lo anterior.
3. Sea $z \in \mathfrak{z}(\mathfrak{n})$ entonces para todo $x \in \mathfrak{n}$ se verifica $[z, x] = 0$. Luego $0 = D([z, x]) = [D(z), x] + [z, D(x)] = [D(z), x]$ para todo $x \in \mathfrak{n}$, y por lo tanto $D(z) \in \mathfrak{z}(\mathfrak{n})$. \square

Capítulo 2

Homología y cohomología de álgebras de Lie

2.1. Preliminares sobre álgebra homológica

Definición 2.1. Un complejo decreciente C es una sucesión de espacios vectoriales y de morfismos

$$0 \leftarrow C_0 \xleftarrow{d_0} C_1 \xleftarrow{d_1} C_2 \xleftarrow{d_2} \dots \xleftarrow{d_{n-1}} C_n \xleftarrow{d_n} \dots$$

donde C_i son espacios vectoriales sobre el cuerpo de los números complejos y d_i son transformaciones lineales tales que $d_i \circ d_{i+1} = 0$.

Un complejo creciente C es una sucesión de espacios vectoriales y de morfismos

$$0 \rightarrow C_0 \xrightarrow{d_0} C_1 \xrightarrow{d_1} C_2 \xrightarrow{d_2} \dots \xrightarrow{d_{n-1}} C_n \xrightarrow{d_n} \dots$$

donde C_i son espacios vectoriales sobre el cuerpo de los números complejos y d_i son transformaciones lineales tales que $d_{i+1} \circ d_i = 0$.

En ambos casos consideramos $d_{-1} = 0$ y decimos que el complejo es finito si existe un i_0 tal que $C_i = 0$ para todo $i \geq 0$.

Definición 2.2. Dado un complejo decreciente C definimos su homología

$$H_i(C) = \text{Nu}(d_{i-1}) / \text{Im}(d_i) \text{ para todo } i \geq 0$$

y definimos $H_*(C) = \bigoplus H_i(C)$.

Análogamente, dado un complejo creciente C definimos su cohomología

$$H^i(C) = \text{Nu}(d_i) / \text{Im}(d_{i-1}) \text{ para todo } i \geq 0$$

y definimos $H^*(C) = \bigoplus H^i(C)$.

Definición 2.3. Definimos los siguientes espacios vectoriales

$$\begin{aligned} C_{par} &= \bigoplus_{j \geq 0} C_{2j}. \\ C_{impar} &= \bigoplus_{j \geq 0} C_{2j+1}. \end{aligned}$$

Denotaremos con $|V|$ la dimensión del espacio vectorial V , de las ecuaciones anteriores tenemos

$$\begin{aligned} |C_{par}| &= \sum_{i \geq 0} |C_{2i}|. \\ |C_{impar}| &= \sum_{i \geq 0} |C_{2i+1}|. \end{aligned}$$

La siguiente proposición nos brinda una cota para la dimensión de la (co)homología de un complejo.

Proposición 2.4. *Sea (C, d_i) un complejo decreciente finito de espacios vectoriales de dimensión finita entonces*

$$|H^*(C)| \geq ||C_{par}| - |C_{impar}||.$$

Análogamente, si (C, d_i) un complejo creciente finito de espacios vectoriales de dimensión finita entonces

$$|H_*(C)| \geq ||C_{par}| - |C_{impar}||.$$

Demostración. Hacemos sólo la demostración para el caso de complejo decreciente, el otro caso es completamente análogo. Por convención tomamos $C_{-1} = \{0\}$ y d_{-1} la función nula.

Sabemos que para $i \geq 0$

$$\begin{aligned} |H^{2i}| &= |Nu(d_{2i})| - |Im(d_{2i-1})| \\ &= |C_{2i}| - |Im(d_{2i})| - |C_{2i-1}| + |Nu(d_{2i-1})|, \\ |H^{2i+1}| &= |Nu(d_{2i+1})| - |Im(d_{2i})|. \end{aligned}$$

Sumando en i nos queda

$$\begin{aligned} |H^*(C)| &= \sum |H^i(C)| \\ &= \sum_{i \geq 0} |C_{2i}| - \sum_{i \geq 0} |C_{2i+1}| + \sum_{i \geq 0} (2|Nu(d_{2i+1})| - 2|Im(d_{2i})|) \\ &= |C_{par}| - |C_{impar}| + \sum_{i \geq 0} (2|Nu(d_{2i+1})| - 2|Im(d_{2i})|) \\ &\geq |C_{par}| - |C_{impar}|, \end{aligned}$$

pues $Im(d_{2i}) \subset Nu(d_{2i+1})$.

Por otro lado, sabemos que para todo $i \geq 0$ se cumple

$$\begin{aligned} |H^{2i}| &= |Nu(d_{2i})| - |Im(d_{2i-1})| \\ |H^{2i+1}| &= |Nu(d_{2i+1})| - |Im(d_{2i})| \\ &= |C_{2i+1}| - |Im(d_{2i+1})| - |C_{2i}| + |Nu(d_{2i})| \end{aligned}$$

y sumando en i nos queda

$$\begin{aligned} |H^*(C)| &= \sum |H^i(C)| \\ &= \sum_{i \geq 0} |C_{2i+1}| - \sum_{i \geq 0} |C_{2i}| + \sum_{i \geq 0} (2|Nu(d_{2i})| - 2|Im(d_{2i-1})|) \\ &= |C_{impar}| - |C_{par}| + \sum_{i \geq 0} (2|Nu(d_{2i})| - 2|Im(d_{2i-1})|) \\ &\geq |C_{impar}| - |C_{par}|, \end{aligned}$$

pues $Im(d_{2i-1}) \subset Nu(d_{2i})$.

De este modo hemos probado que

$$|H^*(C)| \geq ||C_{par}| - |C_{impar}||.$$

Que es lo que queríamos probar. □

2.2. Cohomología de álgebras de Lie

A continuación asociamos a cada álgebra de Lie \mathfrak{n} y a cada representación de \mathfrak{n} un complejo decreciente para definir la cohomología de \mathfrak{n} .

Definición 2.5. *Sea \mathfrak{n} un álgebra de Lie y $\rho : \mathfrak{n} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ una representación de \mathfrak{n} . Asociados a \mathfrak{n} y a V consideremos los espacios $\mathcal{A}^n = \mathcal{A}^n(V)$ de aplicaciones multilineales alternantes en V definidos de la siguiente forma:*

1. $\mathcal{A}^0 = V$ se interpreta como el espacio de las funciones constantes $f_v : \mathfrak{n} \rightarrow V$ tal que $f_v(x) = v$, para todo $x \in \mathfrak{n}$.
2. $\mathcal{A}^n, n \geq 1$ es el espacio de las aplicaciones $f : \mathfrak{n}^n \rightarrow V$ n -lineales que satisfacen

$$f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = (-1)^{|\sigma|} f(x_1, \dots, x_n),$$

para toda permutación σ de n elementos, donde $|\sigma|$ denota el orden de la permutación n , que es 0 o 1 dependiendo si σ es producto de un número par o impar respectivamente de trasposiciones.

Recordemos que $f : \mathfrak{n}^n \rightarrow V$ n -lineal significa que si fijamos todas las variables menos la i -ésima, la función que se obtiene de $\mathfrak{n} \rightarrow V$ es lineal. En particular, si $f \in \mathcal{A}^n$ entonces $f(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) = 0$ para todo $i = 1 \dots n$.

Observamos que \mathcal{A}^n es un espacio vectorial sobre el cuerpo \mathbb{C} con la suma y multiplicación por escalar de funciones habituales. Además, sea

$$\varphi : \Lambda^n \mathfrak{n}^* \otimes V \rightarrow \mathcal{A}^n(V)$$

definida por $\varphi(\lambda_1 \wedge \dots \wedge \lambda_n \otimes v) = f$, donde $f(x_1, \dots, x_n) = \det(\lambda_i(x_j))v$. Resulta que φ es un isomorfismo y por lo tanto

$$|\mathcal{A}^n| = \binom{|\mathfrak{n}|}{n} |V|.$$

En particular, $\mathcal{A}^n = 0$ para todo $n \geq |\mathfrak{n}|$. Ahora vamos a definir una estructura de complejo decreciente con los espacios \mathcal{A}^n . Sea $d_n : \mathcal{A}^n \rightarrow \mathcal{A}^{n+1}$, con $n \geq 0$, el operador diferenciación exterior definido del siguiente modo:

$$\begin{aligned} (d_n f)(x_1, \dots, x_{n+1}) &= \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} \rho(x_i) f(x_1, \dots, \widehat{x}_i, \dots, x_{n+1}) \\ &+ \sum_{i < j} (-1)^{i+j} f([x_i, x_j], x_1, \dots, \widehat{x}_i, \dots, \widehat{x}_j, \dots, x_{n+1}). \end{aligned}$$

El símbolo $\widehat{}$ significa, como es usual, que la expresión que está por debajo de él es omitida. Se puede probar que, para todo $n \geq 0$, se cumple $d_{n+1} \circ d_n = 0$. Verifiquemos que $d_{n+1} \circ d_n = 0$ para $n = 0, 1$. Sabemos que

$$d_0 v(x) = \rho(x)v, \quad v \in V;$$

$$d_1 f(x, y) = \rho(x)f(y) - \rho(y)f(x) - f([x, y]), \quad f \in \mathcal{A}_1;$$

$$d_2 f(x, y, z) = \rho(x)f(y, z) - \rho(y)f(x, z) + \rho(z)f(x, y) \\ - f([x, y], z) + f([x, z], y) - f([y, z], x), \quad f \in \mathcal{A}_2.$$

1. Verifiquemos que $d_1 \circ d_0 = 0$.

$$(d_1 \circ d_0) v(x, y) = d_1 d_0 v(x, y) \\ = \rho(x)d_0 v(y) - \rho(y)d_0 v(x) - d_0 v([x, y]) \\ = \rho(x)\rho(y)v - \rho(y)\rho(x)v - ([\rho(x), \rho(y)])v \\ = 0.$$

2. Verifiquemos que $d_2 \circ d_1 = 0$.

$$(d_2 \circ d_1) f(x, y, z) = d_2 d_1 f(x, y, z) \\ = \rho(x)d_1 f(y, z) - \rho(y)d_1 f(x, z) + \rho(z)d_1 f(x, y) \\ - d_1 f([x, y], z) + d_1 f([x, z], y) - d_1 f([y, z], x) \\ = \rho(x)(\rho(y)f(z) - \rho(z)f(y) - f([y, z])) \\ - \rho(y)(\rho(x)f(z) - \rho(z)f(x) - f([x, z])) \\ + \rho(z)(\rho(x)f(y) - \rho(y)f(x) - f([x, y])) \\ - \rho[x, y]f(z) - \rho(z)f([x, y]) - (f[[x, y], z]) \\ + \rho[x, z]f(y) - \rho(y)f([x, z]) - (f[[x, z], y]) \\ - \rho[y, z]f(x) - \rho(x)f([y, z]) - (f[[y, z], x]) \\ = 0.$$

Ejemplo. Sea $f : \mathfrak{n} \times \mathfrak{n} \rightarrow \mathfrak{n}$, dada por el corchete, esto es $f(x, y) = [x, y]$. Sin duda $f \in \mathcal{A}^2$. Tomando la representación adjunta, esto es $\rho = ad$, resulta $f = d(Id)$ y por lo tanto $df = 0$. En efecto

$$d(Id)(x, y) = \rho(x)Id(y) - \rho(y)Id(x) - Id([x, y]) \\ = [x, y] - [y, x] - [x, y] \\ = f(x, y).$$

Definición 2.6. La cohomología $H^*(\mathfrak{n}, \rho)$ de \mathfrak{n} con coeficientes en la representación (ρ, V) es la cohomología del complejo creciente (\mathcal{A}^n, d_n) . Es decir que si definimos $\mathcal{C}^n = Nu(d_n) \subset \mathcal{A}^n$ y $\mathcal{F}^n = Im(d_{n-1}) \subset \mathcal{C}^n$, entonces $H^n(\mathfrak{n}, \rho) = \mathcal{C}^n / \mathcal{F}^n$.

Ejemplos.

1. Sea \mathfrak{n} un álgebra de Lie abeliana de dimensión finita, $V = \mathbb{C}$ y ρ una representación en V , esto es, ρ es una funcional lineal en \mathfrak{n} .

Como \mathfrak{n} es abeliana

$$df((x_1, \dots, x_{n+1})) = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} \rho(x_i) f(x_1, \dots, \widehat{x}_i, \dots, x_{n+1}).$$

Se distinguen dos casos

- a) $\rho = 0$. En este caso $d = 0$ y por lo tanto $\mathcal{F}^n = 0$, $\mathcal{C}^n = \mathcal{A}^n$ y $\mathcal{H}^n = \mathcal{A}^n$ y por lo tanto $H^n(\mathfrak{n}, \rho) = \mathcal{A}^n$ para todo n .
- b) $\rho \neq 0$. Encontremos $H^1(\mathfrak{n}, \rho)$. Sea $f = dv$, con $v \in \mathbb{C}$, entonces $f(x) = \rho(x)v$ y por lo tanto

$$\mathcal{F}^1 = \{f : f = v\rho \text{ con } v \in \mathbb{C}\},$$

esto es \mathcal{F}^1 es el subespacio de \mathfrak{n}^* generado por ρ .

Sea $f \in \mathcal{A}^1$, entonces $df(x, y) = \rho(x)f(y) - \rho(y)f(x)$ para todo $x, y \in \mathfrak{n}$. Tomando y tal que $\rho(y) \neq 0$ tenemos que $f \in \mathcal{C}^1$ si y sólo si

$$f(x) = \frac{f(y)}{\rho(y)}\rho(x) \text{ para todo } x.$$

Así obtenemos que $\mathcal{F}^1 = \mathcal{C}^1$ y por lo tanto $H^1(\mathfrak{n}, \rho) = 0$.

2. Sea \mathfrak{n} el álgebra de Heisenberg. Esta álgebra de Lie tiene base $\{x, y, z\}$ donde el único corchete no nulo entre elementos de la base es $[x, y] = z$. Consideremos la representación trivial $\rho = 0$ en $V = \mathbb{C}$. Entonces

$$\mathcal{F}^1 = \{f : f(w) = \rho(w)v = 0 \text{ para todo } w\} = 0.$$

Calculemos \mathcal{C}^1 . Tenemos que $f \in \mathcal{C}^1$ si y solo si para todo $x_1, x_2 \in \mathfrak{n}$

$$\rho(x_1)f(x_2) - \rho(x_2)f(x_1) - f([x_1, x_2]) = 0,$$

esto es $f([x_1, x_2]) = 0$ con x_1, x_2 arbitrarios. Esta igualdad es equivalente a $f(z) = 0$. Por lo tanto

$$\mathcal{C}^1 = \{f : f(z) = 0\}.$$

Esto dice que $|\mathcal{C}^1| = 2$. Como $H^1(\mathfrak{n}, \rho) = \mathcal{C}^1$ obtenemos que $|H^1(\mathfrak{n}, \rho)| = 2$.

Calculemos $H^2(\mathfrak{n}, \rho)$. Si $f \in \mathcal{A}^2$, entonces

$$\begin{aligned} df(x, y, z) &= -f([x, y], z) + f([x, z], y) - f([y, z], x) = \\ &= -f(z, z) \\ &= 0 \end{aligned}$$

y por lo tanto $\mathcal{C}^2 = \mathcal{A}^2$.

Para encontrar \mathcal{F}^2 recordemos que $df(x_1, x_2) = -f([x_1, x_2])$, si $f \in \mathcal{A}^1$. Como $[x_1, x_2]$ es un múltiplo de z , concluimos que si $h \in \mathcal{F}^2$ es un múltiplo de la función

$$h_0(x_1, x_2) = f_0([x_1, x_2]), \text{ donde } f_0 \in \mathcal{A}^1 \text{ definida por } f_0(x) = f_0(y) = 0 \text{ y } f_0(z) = 1.$$

Luego $|\mathcal{F}^2| = 1$ y por lo tanto $|H^2(\mathfrak{n}, \rho)| = 2$.

Dado que $d_3 = 0$, obtenemos que $\mathcal{F}^3 = 0$ y de lo calculado anteriormente $\mathcal{C}^3 = \mathcal{A}^3$ $H^3(\mathfrak{n}, \rho) = \mathcal{A}^3$ y por lo tanto $|H^3(\mathfrak{n}, \rho)| = 1$.

Luego tenemos

$$\begin{aligned} H^1(\mathfrak{n}, \rho) &= \mathcal{C}^1 = \{f \in \mathcal{A}^1 : f(z) = 0\}, & |H^1(\mathfrak{n}, \rho)| &= 2. \\ H^2(\mathfrak{n}, \rho) &= \mathcal{C}^2/\mathcal{F}^2 = \mathcal{A}^2/\{f \in \mathcal{A}^2 : f = \lambda h_0, \lambda \in V\}, & |H^2(\mathfrak{n}, \rho)| &= 2. \\ &H^3(\mathfrak{n}, \rho) = \mathcal{C}^3 = \mathcal{A}^3, & |H^3(\mathfrak{n}, \rho)| &= 1. \\ \text{si } n \geq 4, &H^n(\mathfrak{n}, \rho) = 0 \text{ y} & |H^n(\mathfrak{n}, \rho)| &= 0. \end{aligned}$$

3. Sea $\mathfrak{n} = \mathfrak{sl}(2, R)$ y ρ la representación trivial de dimensión uno. Consideremos la base $\{x, h, y\}$ tal que

$$[x, y] = h, \quad [h, x] = 2x, \quad [h, y] = -2y.$$

Es claro que

- a) $d_0 v(a) = \rho(a)v = 0$,
- b) $d_1 f(x, h) = -f([x, h]) = 2f(x)$,
- c) $d_1 f(x, y) = -f([x, y]) = -f(h)$,
- d) $d_1 f(h, y) = -f([h, y]) = 2f(y)$,

De estas igualdades se ve que variando f en una base $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ dual de $\{x, h, y\}$, obtenemos que df recorre la base $\{\alpha \wedge \beta, \alpha \wedge \gamma, \beta \wedge \gamma\}$ de $\wedge^2 \mathfrak{n}$ y por lo tanto d_1 es inyectiva. Por lo tanto $\mathcal{C}^1 = 0$ y $\mathcal{F}^2 = \mathcal{A}^2$. Por estas observaciones tenemos que

$$H^1(\mathfrak{n}, \rho) = 0, \quad H^2(\mathfrak{n}, \rho) = 0, \quad H^3(\mathfrak{n}, \rho) = \mathcal{A}^3 \quad H^n(\mathfrak{n}, \rho) = 0, \quad \text{para todo } n \geq 4.$$

Originalmente, el interés en la cohomología de álgebras de Lie, se despertó debido a dos resultados de gran importancia obtenidos en la década del 50 por Nomizu y Bott respectivamente. Estos resultados reducían problemas geométricos y topológicos al problema meramente algebraico de calcular la cohomología de ciertas álgebras de Lie asociadas al espacio geométrico o topológico en cuestión. Más precisamente:

1. En el año 1954 Nomizu (ver [No]) probó que los grupos de cohomología $H^*(X)$ de un espacio homogéneo compacto $X = N/\Gamma$, donde N es un grupo de Lie nilpotente conexo, co-compacto y semisimple y Γ es un subgrupo discreto de N , son canónicamente isomorfos a los grupos de cohomología $H^*(X)$ del álgebra de Lie \mathfrak{n} de N .
2. En el año 1957 Bott (ver [Bo]) consigue expresar la cohomología $H^*(X, \varepsilon)$ de un espacio homogéneo compacto conexo y simplemente conexo X con coeficientes en el haz de secciones locales holomorfas de un fibrado vectorial homogéneo E sobre X , como el subespacio de invariantes bajo la acción de un subgrupo de automorfismos en los grupos de cohomología de ciertas álgebras de Lie relacionada con X .

Desde ese momento, han aparecido numerosos trabajos de gran importancia dedicados al cálculo de la cohomología de álgebras de Lie. En la lista de referencias se pueden encontrar algunos de los que están más relacionados con este trabajo.

El problema de calcular la cohomología de un álgebra de Lie dada, aún de dimensión finita, es generalmente difícil. Hay muchas conjeturas importantes abiertas y relativamente pocas familias de álgebras para las cuales se conozca en detalle su cohomología.

Estrechamente vinculada con la cohomología está el concepto de homología como veremos en la siguiente sección.

2.3. Homología de álgebras de Lie

A continuación asociamos a cada álgebra de Lie \mathfrak{n} un complejo decreciente para definir la homología de \mathfrak{n} .

Definición 2.7. Sea \mathfrak{n} un álgebra de Lie de dimensión n y sea $\rho : \mathfrak{n} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$ una representación de \mathfrak{n} . Definimos el siguiente complejo

$$0 \rightarrow \bigwedge^n \mathfrak{n} \otimes V \xrightarrow{\partial_n} \bigwedge^{n-1} \mathfrak{n} \otimes V \xrightarrow{\partial_{n-1}} \dots \xrightarrow{\partial_3} \bigwedge^2 \mathfrak{n} \otimes V \xrightarrow{\partial_2} \mathfrak{n} \otimes V \xrightarrow{\partial_1} V \rightarrow 0,$$

donde $\partial_k : \bigwedge^k \mathfrak{n} \otimes V \rightarrow \bigwedge^{k-1} \mathfrak{n} \otimes V$ está definida por

$$\begin{aligned} \partial_k(x_1 \wedge \dots \wedge x_k \otimes v) &= \sum_{i < j} (-1)^{i+j+1} [x_i, x_j] \wedge x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge \widehat{x}_i \wedge \dots \wedge \widehat{x}_j \wedge \dots \wedge x_k \otimes v \\ &\quad + \sum_j (-1)^{j+1} x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge \widehat{x}_j \wedge \dots \wedge x_k \otimes \rho(x_j)(v). \end{aligned}$$

Definimos la homología de \mathfrak{n} con coeficientes en V como

$$H_i(\mathfrak{n}, V) = Nu(\partial_i) / Im(\partial_{i+1}),$$

y definimos la homología total como

$$H_*(\mathfrak{n}, V) = \bigoplus H_i(\mathfrak{n}, V).$$

Recordemos que si $T : V \rightarrow W$ es una transformación lineal, entonces la transpuesta de T es $T^* : W^* \rightarrow V^*$ definida por $T^*(\lambda) = \lambda \circ T$ para $\lambda \in W^*$. Además si \mathfrak{B}_V y \mathfrak{B}_W son bases de V y W , respectivamente, y si \mathfrak{B}_V^* y \mathfrak{B}_W^* son las bases duales inducidas en los respectivos espacios duales, entonces

$$[T^*]_{\mathfrak{B}_W^* \mathfrak{B}_V^*} = \left([T]_{\mathfrak{B}_V \mathfrak{B}_W} \right)^t,$$

de donde se deducen las siguientes igualdades entre dimensiones de los subespacios, donde representamos $\dim(W) = |W|$ para W un subespacio vectorial

$$|Im(T)| + |Nu(T)| = |V|$$

y

$$|Im(T)| = |\text{Esp Col}(T)| = |\text{Esp Fila}(T)| = |Im(T^*)|. \quad (2.1)$$

Por otro lado tenemos los siguientes isomorfismos

1. $(\bigwedge^k \mathfrak{n})^* \simeq \mathcal{A}^k(\mathbb{C})$, donde el isomorfismo

$$\phi_0 : \mathcal{A}^k(\mathbb{C}) \rightarrow (\bigwedge^k \mathfrak{n})^*$$

está dado por $\phi_0(f)(x_1 \wedge \dots \wedge x_n) = f(x_1, \dots, x_n)$; el hecho de que f sea alternante hace que $\phi_0(f)$ esté bien definida (no depende de com ordenemos $x_1 \wedge \dots \wedge x_n$) y el hecho de que f sea multilineal hace que $\phi_0(f)$ sea lineal. En resumen: funciones lineales en $\bigwedge^k \mathfrak{n}$ es lo mismo que que funciones multilineales y alternantes en $\underbrace{\mathfrak{n} \times \dots \times \mathfrak{n}}_k$.

2. Más generalmente

$$\phi_1 : \mathcal{A}^k(V^*) \rightarrow (\bigwedge^k \mathfrak{n} \otimes V)^*,$$

definida por $\phi_1(f)(x_1 \wedge \dots \wedge x_n \otimes v) = f(x_1, \dots, x_n)(v)$, es un isomorfismo cuya inversa es $\phi_1^{-1}(g)(x_1, \dots, x_n)(v) = g(x_1 \wedge \dots \wedge x_n \otimes v)$.

3. $\bigwedge^k \mathfrak{n}^* \otimes V^* \simeq \mathcal{A}^k(V^*)$ y si definimos

$$\varphi : \bigwedge^k \mathfrak{n}^* \otimes V^* \rightarrow \mathcal{A}^k(V^*)$$

dada por

$$\varphi(\lambda_1 \wedge \dots \wedge \lambda_n \otimes \mu) = f$$

donde $f(x_1, \dots, x_n) = \det(\lambda_i(x_j))\mu$, entonces φ resulta un isomorfismo. En realidad esto es consecuencia de 2 y de que $\bigwedge^k \mathfrak{n}^* \otimes V^* \simeq (\bigwedge^k \mathfrak{n} \otimes V)^*$

Proposición 2.8. *La función ϕ_1 establece un isomorfismo entre el dual del complejo que calcula la homología con coeficientes en V*

$$0 \rightarrow \bigwedge^n \mathfrak{n} \otimes V \xrightarrow{\partial_n} \bigwedge^{n-1} \mathfrak{n} \otimes V \xrightarrow{\partial_{n-1}} \dots \xrightarrow{\partial_3} \bigwedge^2 \mathfrak{n} \otimes V \xrightarrow{\partial_2} \mathfrak{n} \otimes V \xrightarrow{\partial_1} V \rightarrow 0$$

y el complejo que calcula la cohomología con coeficientes en V^*

$$0 \leftarrow \mathcal{A}^n(V^*) \xleftarrow{d_{n-1}} \mathcal{A}^{n-1}(V^*) \xleftarrow{d_{n-2}} \dots \xleftarrow{d_2} \mathcal{A}^2(V^*) \xleftarrow{d_1} \mathcal{A}^1(V^*) \xleftarrow{d_0} V^* \leftarrow 0.$$

Por lo tanto

$$|H_k(\mathfrak{n}, V)| = |H^k(\mathfrak{n}, V^*)|$$

para todo $k = 0, \dots, |\mathfrak{n}|$.

Demostración. Queremos ver que

$$(-\partial^t) = \left(\bigwedge^k \mathfrak{n} \otimes V \right)^* \rightarrow \left(\bigwedge^{k+1} \mathfrak{n} \otimes V \right)^*$$

es igual a

$$\phi_1 \circ d \circ \phi_1^{-1} = \left(\bigwedge^k \mathfrak{n} \otimes V \right)^* \rightarrow \left(\bigwedge^{k+1} \mathfrak{n} \otimes V \right)^*,$$

donde ϕ_1^{-1} es la definida anteriormente.

Es decir que queremos ver que

$$\phi_1^{-1} \circ \partial^t \circ \phi_1 = -d$$

$$\begin{aligned} & \phi_1^{-1} \circ \partial^t \circ \phi_1(f)(x_1, \dots, x_k)(v) \\ &= \partial^t \circ \phi_1(f)(x_1 \wedge \dots \wedge x_k \otimes v) \\ &= \phi_1(f)(\partial_n^t(x_1 \wedge \dots \wedge x_k \otimes v)) \\ &= \phi_1(f) \left(\sum_{i < j} (-1)^{i+j+1} [x_i, x_j] \wedge x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge \widehat{x}_i \wedge \dots \wedge \widehat{x}_j \wedge \dots \wedge x_k \otimes v \right. \\ & \quad \left. + \sum_j (-1)^{j+1} x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge \widehat{x}_j \wedge \dots \wedge x_k \otimes \rho(x_j)(v) \right) \\ &= \sum_{i < j} (-1)^{i+j+1} \phi_1(f)([x_i, x_j] \wedge x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge \widehat{x}_i \wedge \dots \wedge \widehat{x}_j \wedge \dots \wedge x_k \otimes v) \\ & \quad + \sum_j (-1)^{j+1} \phi_1(f)(x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge \widehat{x}_j \wedge \dots \wedge x_k \otimes \rho(x_j)(v)) \\ &= \sum_{i < j} (-1)^{i+j+1} f([x_i, x_j], x_1, \dots, \widehat{x}_i, \dots, \widehat{x}_j, \dots, x_k)(v) \\ & \quad + \sum_j (-1)^{j+1} f(x_1, \dots, \widehat{x}_j, \dots, x_k)(\rho(x_j)(v)) \\ &= \sum_{i < j} (-1)^{i+j+1} f([x_i, x_j], x_1, \dots, \widehat{x}_i, \dots, \widehat{x}_j, \dots, x_k)(v) \\ & \quad - \sum_j (-1)^{j+1} \rho^*(x_j)(f)(x_1, \dots, \widehat{x}_j, \dots, x_k)(v) \\ &= -d(f)(x_1, \dots, x_k)(v). \end{aligned}$$

Para la penúltima igualdad recordemos que $\rho^*(f)(v) = -f(\rho(v))$.

Sea el dual del complejo que calcula la homología con coeficientes en V

$$0 \leftarrow \bigwedge^n (\mathfrak{n} \otimes V)^* \xleftarrow{\partial_n^t} \bigwedge^{n-1} (\mathfrak{n} \otimes V)^* \xleftarrow{\partial_{n-1}^t} \dots \xleftarrow{\partial_3^t} \bigwedge^2 (\mathfrak{n} \otimes V)^* \xleftarrow{\partial_2^t} (\mathfrak{n} \otimes V)^* \xleftarrow{\partial_1^t} V^* \leftarrow 0$$

donde

$$\begin{aligned} & \partial_k^t(f_1 \wedge \dots \wedge f_k \otimes v^*)(x_1 \wedge \dots \wedge x_k \otimes v) \\ &= (f_1 \wedge \dots \wedge f_k \otimes v^*)(\partial_n^t(x_1 \wedge \dots \wedge x_k \otimes v)) \\ &= (f_1 \wedge \dots \wedge f_k \otimes v^*) \left(\sum_{i < j} (-1)^{i+j+1} [x_i, x_j] \wedge x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge \widehat{x}_i \wedge \dots \wedge \widehat{x}_j \wedge \dots \wedge x_k \otimes v \right. \\ & \quad \left. + \sum_j (-1)^{j+1} x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge \widehat{x}_j \wedge \dots \wedge x_k \otimes \rho(x_j)(v) \right) \\ &= (f_1 \wedge \dots \wedge f_k \otimes v^*) \left(\sum_{i < j} (-1)^{i+j+1} [x_i, x_j] \wedge x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge \widehat{x}_i \wedge \dots \wedge \widehat{x}_j \wedge \dots \wedge x_k \otimes v \right. \\ & \quad \left. + \sum_j (-1)^{j+1} x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge \widehat{x}_j \wedge \dots \wedge x_k \otimes \rho(x_j)(v) \right). \end{aligned}$$

de lo demostrado podemos asegurar que

$$|Im(d_{k+1})| = |Im(\partial_{k+1}^t)|, \quad |Nu(d_{k+1})| = |Nu(\partial_{k+1}^t)|,$$

y por 2.1 tenemos

$$|Im(\partial_{k+1}^t)| = |Im(\partial_{k+1})|, \quad \text{para } k = 1, \dots, |\mathfrak{n}|.$$

Luego

$$\begin{aligned} |Nu(\partial_{k+1}^t)| &= \left| \bigwedge^k (\mathfrak{n} \otimes V)^* \right| - |Im(\partial_{k+1}^t)| \\ &= \left| \bigwedge^k (\mathfrak{n} \otimes V) \right| - |Im(\partial_{k+1})| \\ &= |Nu(\partial_k)| + |Im(\partial_k)| - |Im(\partial_{k+1})| \\ &= |H_k(\mathfrak{n}, V)| + |Im(\partial_k^t)|. \end{aligned}$$

De donde nos queda

$$|H^{k+1}(\mathfrak{n}, V^*)| = |Nu(d_{k+2})| - |Im(d_{k+1})| = |Nu(\partial_{k+2}^*)| - |Im(\partial_{k+1}^*)| = |H_{k+1}(\mathfrak{n}, V)|, \quad \text{para } k = 1, \dots, |\mathfrak{n}|.$$

esto es

$$|H_k(\mathfrak{n}, V)| = |H^k(\mathfrak{n}, V^*)|$$

para todo $k = 0, \dots, |\mathfrak{n}|$, como se quería demostrar. \square

Corolario 2.9. *Sea \mathfrak{n} un álgebra de Lie de dimensión n entonces*

$$|H_*(\mathfrak{n})| = |H^*(\mathfrak{n})|.$$

Demostración. Como por la proposición anterior

$$|H_k(\mathfrak{n}, V)| = |H^k(\mathfrak{n}, V^*)|,$$

para todo $k = 0, \dots, |\mathfrak{n}|$. En el caso particular en que $V = \mathbb{C}$, nos queda para cada k

$$|H_k(\mathfrak{n})| = |H^k(\mathfrak{n})|.$$

Por lo tanto

$$|H_*(\mathfrak{n})| = |H^*(\mathfrak{n})|.$$

□

Capítulo 3

CRT en álgebras de Lie 3-pasos nilpotentes graduadas

3.1. Introducción

Hace más de 25 años Halperin formuló la Conjetura del Rango Toral (CRT). Una versión algebraica es la siguiente.

Conjetura del Rango Toral (CRT).

Sea \mathfrak{n} un álgebra de Lie nilpotente de dimensión finita y sea \mathfrak{z} el centro de \mathfrak{n} , entonces

$$\dim(H^*(\mathfrak{n})) \geq 2^{\dim(\mathfrak{z})}.$$

Esta conjetura permanece abierta en general y sólo ha sido demostrada para ciertas clases de álgebras de Lie nilpotentes.

Esta conjetura tiene origen en la geometría. El rango toral $r(X)$ de una variedad diferenciable X es la dimensión del mayor toro que actúa en X libremente. Originalmente la conjetura afirma que la cohomología de la variedad X tiene dimensión mayor o igual a $2^{r(X)}$.

Una nilvariedad compacta es una variedad diferenciable $X = N/\Gamma$, donde N es un grupo de Lie nilpotente conexo y simplemente conexo y Γ es un subgrupo discreto co-compacto de N . El rango toral de una nilvariedad compacta es la dimensión del centro del álgebra de Lie de N .

Por otro lado, el teorema de Nomizu afirma que la cohomología de la variedad X es igual a la cohomología $H^*(\mathfrak{n})$ del álgebra de Lie \mathfrak{n} . De este modo la conjetura original para nilvariedades compacta es equivalente a la versión algebraica de la CRT.

3.2. Longitud del polinomio asociado a una graduación.

Cuando el álgebra de Lie $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_1 \oplus \mathfrak{n}_2 \oplus \dots \oplus \mathfrak{n}_k$ es k -pasos nilpotente y graduada se prueba en [T2] que

$$\dim(H_*(\mathfrak{n})) \geq L(p) \tag{3.1}$$

donde si $d_i = \dim(\mathfrak{n}_i)$,

$$p(x) = (1-x)^{d_1}(1-x^2)^{d_2} \dots (1-x^k)^{d_k} = \sum a_i x^i,$$

$$L(p) = \sum |a_i|$$

es la longitud del polinomio. Recordemos el siguiente resultado.

Lema 3.1. *Sea $p(x)$ un polinomio en x y sea $\xi \in S^1$, donde S^1 es el círculo unidad, se verifica*

$$L(p) \geq |p(\xi)|.$$

Demostración. Sea $p(x) = \sum_{i=1}^k a_i x^i$ entonces $L(p) = \sum_{i=1}^k |a_i|$ además

$$|p(\xi)| = \left| \sum_{i=1}^k a_i \xi^i \right| \leq \sum_{i=1}^k |a_i \xi^i| = \sum_{i=1}^k |a_i| |\xi^i| = \sum_{i=1}^k |a_i| = L(p).$$

que es lo que queríamos probar. \square

Una consecuencia inmediata del resultado (3.1) y este lema es el siguiente teorema.

Teorema 3.2. *Dada un álgebra de Lie \mathfrak{n} 2-pasos nilpotente la CRT es cierta.*

Demostración. Si \mathfrak{n} es dos pasos nilpotente, entonces es graduada, $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_1 \oplus \mathfrak{n}_2$ y $p(x) = (1-x)^{d_1}(1-x^2)^{d_2}$. Si \mathfrak{n} es indescomponible entonces $\mathfrak{z}(\mathfrak{n}) \subset \mathfrak{n}_2$.

Del lema anterior, si $\xi \in S^1$, se verifica $L(p) \geq |p(\xi)|$. Tomando $\xi_0 = \exp(i\frac{\pi}{2})$ resulta

$$L(p) \geq |p(\xi_0)| > 2^{d_2},$$

por lo tanto, como se verifica (3.1)

$$\dim(H_*(\mathfrak{n})) \geq L(p) \geq 2^{d_2} \geq 2^{\dim(\mathfrak{z})}.$$

Luego para álgebras de Lie dos pasos nilpotentes e indescomponible la CRT es cierta.

En el caso general \mathfrak{n} se descompone en suma de \mathfrak{g}_i , álgebras de Lie indescomponibles, todas ellas nilpotentes a lo sumo dos pasos y graduadas, por lo tanto, para todas las \mathfrak{g}_i , se cumple la CRT. Como $H(\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2) = H(\mathfrak{g}_1) \otimes H(\mathfrak{g}_2)$ y $\dim(\mathfrak{z}(\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2)) = \dim(\mathfrak{z}(\mathfrak{g}_1)) + \dim(\mathfrak{z}(\mathfrak{g}_2))$, resulta la tesis del teorema. \square

Observación 3.3. *Si $p(x) = (1-x)^{d_1}(1-x^2)^{d_2}(1-x^3)^{d_3}$ entonces $L(p) \geq 3^{\frac{d_2}{2}} 2^{d_3}$.*

Del Lema 3.1 si tomamos $\xi_0 = \exp(i\frac{\pi}{3})$ entonces

$$\begin{aligned} L(p) \geq |p(\xi_0)| &= |1 - \xi_0|^{d_1} |1 - \xi_0^2|^{d_2} |1 - \xi_0^3|^{d_3} \\ &= 3^{\frac{d_2}{2}} 2^{d_3}. \end{aligned}$$

Estos resultado nos lleva a preguntarnos si la cota de la homología dada por la longitud del polinomio nos sirve para poder inferir cuando un álgebra de Lie 3-pasos nilpotente y graduada cumple la CRT. La respuesta a esta pregunta está desarrollada en el Capítulo 4.

3.3. Álgebras de Lie 3-pasos graduadas

En esta tesis estamos particularmente interesados en las álgebras de Lie 3-pasos nilpotente graduadas. Por ello demostraremos en particular el resultado (3.1), esto es, que si $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_1 \oplus \mathfrak{n}_2 \oplus \mathfrak{n}_3$ un álgebra de Lie 3-pasos nilpotente graduada.

$$\dim(H_*(\mathfrak{n})) \geq L(p).$$

Denotamos las dimensiones de $\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2, \mathfrak{n}_3$ con

$$d_1 = \dim(\mathfrak{n}_1), d_2 = \dim(\mathfrak{n}_2), d_3 = \dim(\mathfrak{n}_3).$$

Sean $a_i \in \mathfrak{n}_1, b_i \in \mathfrak{n}_2$ y $c_i \in \mathfrak{n}_3$.

Definición 3.4. Llamamos W_r^k al subespacio vectorial de $\bigwedge^k \mathfrak{n}$ generado por el conjunto

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 \wedge \dots \wedge a_{k_1} \wedge b_1 \wedge \dots \wedge b_{k_2} \wedge c_1 \wedge \dots \wedge c_{k_3} : \\ k_1 + k_2 + k_3 = k \text{ y } k_1 + 2k_2 + 3k_3 = r \end{array} \right\}.$$

Observación 3.5.

$$W_r^k \simeq \bigoplus_{\substack{k_1 + k_2 + k_3 = k \\ k_1 + 2k_2 + 3k_3 = r}} \left(\bigwedge^{k_1} \mathfrak{n}_1 \otimes \bigwedge^{k_2} \mathfrak{n}_2 \otimes \bigwedge^{k_3} \mathfrak{n}_3 \right).$$

Teniendo en cuenta que la suma es sobre los k_1, k_2, k_3 que verifican que $k_1 + k_2 + k_3 = k$ y $k_1 + 2k_2 + 3k_3 = r$, basta definir

$$\varphi : W_r^k \rightarrow \bigoplus \left(\bigwedge^{k_1} \mathfrak{n}_1 \otimes \bigwedge^{k_2} \mathfrak{n}_2 \otimes \bigwedge^{k_3} \mathfrak{n}_3 \right).$$

tal que

$$\varphi(a_1 \wedge \dots \wedge a_{k_1} \wedge b_1 \wedge \dots \wedge b_{k_2} \wedge c_1 \wedge \dots \wedge c_{k_3}) = (a_1 \wedge \dots \wedge a_{k_1}) \otimes (b_1 \wedge \dots \wedge b_{k_2}) \otimes (c_1 \wedge \dots \wedge c_{k_3}).$$

φ resulta un isomorfismo.

Observar que por ser $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_1 \oplus \mathfrak{n}_2 \oplus \mathfrak{n}_3$ resulta, en particular, que para todo $i \neq j$ es $\mathfrak{n}_i \cap \mathfrak{n}_j = \{0\}$.

Esto asegura que el conjunto $\{a_1, \dots, a_{k_1}, b_1, \dots, b_{k_2}, c_1, \dots, c_{k_3}\}$ es linealmente independiente si y solo si los conjuntos $\{a_1, \dots, a_{k_1}\}$, $\{b_1, \dots, b_{k_2}\}$, $\{c_1, \dots, c_{k_3}\}$ son respectivamente linealmente independiente. Por lo tanto

$$a_1 \wedge \dots \wedge a_{k_1} \wedge b_1 \wedge \dots \wedge b_{k_2} \wedge c_1 \wedge \dots \wedge c_{k_3} = 0$$

si y solo si el conjunto

$$\{a_1, \dots, a_{k_1}, b_1, \dots, b_{k_2}, c_1, \dots, c_{k_3}\}$$

es linealmente dependiente, si y solo si uno de los siguientes conjuntos

$$\{a_1, \dots, a_{k_1}\}, \{b_1, \dots, b_{k_2}\}, \{c_1, \dots, c_{k_3}\}$$

es linealmente dependiente, si y solo si

$$a_1 \wedge \dots \wedge a_{k_1} = 0 \vee b_1 \wedge \dots \wedge b_{k_2} = 0 \vee c_1 \wedge \dots \wedge c_{k_3} = 0$$

si y solo si

$$(a_1 \wedge \dots \wedge a_{k_1}) \otimes (b_1 \wedge \dots \wedge b_{k_2}) \otimes (c_1 \wedge \dots \wedge c_{k_3}) = 0.$$

Teniendo cuenta además las definiciones y propiedades del producto exterior \wedge y del producto tensorial \otimes , podemos asegurar que φ está bien definida y es un morfismo inyectivo de espacios vectoriales. La sobreyectividad es inmediata y por lo tanto φ es un isomorfismo.

Observación 3.6. Por definición, para cada k y para cada r , W_r^k es un subespacio vectorial de $\bigwedge^k \mathfrak{n}$. Además dados r_1, r_2 y k números enteros no negativos, tales que $r_1 \neq r_2$, $W_{r_1}^k \cap W_{r_2}^k = \{0\}$. Por otro lado dados r, k, s enteros no negativos, con $s \neq k$, $W_r^k \cap W_r^s = \{0\}$.

Definición 3.7. Sea d la dimensión del álgebra \mathfrak{n} , definimos los siguientes espacios vectoriales

$$W_r^{par} = \bigoplus_{j=0}^{\lfloor d/2 \rfloor} W_r^{2j}.$$

$$W_r^{impar} = \bigoplus_{j=0}^{\lfloor (d+1)/2 \rfloor} W_r^{2j+1}.$$

Como en el capítulo 2, si V es un espacio vectorial, denotaremos con $|V|$ la dimensión de V . Con esta notación, de las ecuaciones anteriores tenemos

$$|W_r^{par}| = \sum_{j=0}^{[d/2]} |W_r^{2j}|.$$

$$|W_r^{impar}| = \sum_{j=0}^{[d+1/2]} |W_r^{2j+1}|.$$

Notemos que estos espacios vectoriales W_r^k , así definidos, verifican las siguientes propiedades.

Proposición 3.8. 1. $\bigwedge^k \mathfrak{n} \simeq \bigoplus_r W_r^k$ donde se suma sobre todos los r posibles. Notar que si $r < k$, o si $r > 3k$ entonces $W_r^k = \{0\}$.

2. Para cada r , W_r^\bullet es un subcomplejo del complejo que calcula la homología de \mathfrak{n} , tal que

$$0 \rightarrow W_r^n \xrightarrow{\partial_n} W_r^{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \dots \xrightarrow{\partial_2} W_r^1 \xrightarrow{\partial_1} W_r^0 \xrightarrow{\partial_0} 0.$$

3. $H_*(\mathfrak{n}) = \bigoplus_{r=0}^{d_1+2d_2+3d_3} H_*(W_r^\bullet)$, donde $d_i = |\mathfrak{n}_i|$ con $i = 1, 2, 3$. Y por lo tanto

$$|H_*(\mathfrak{n})| = \sum_{r=0}^{d_1+2d_2+3d_3} |H_*(W_r^\bullet)|.$$

4. Para cada r

$$|H_*(W_r^\bullet)| \geq ||W_r^{par}| - |W_r^{impar}||.$$

Demostración. 1. Observemos que

$$\begin{aligned} \bigwedge^k \mathfrak{n} &\simeq \bigwedge^k (\mathfrak{n}_1 \oplus \mathfrak{n}_2 \oplus \mathfrak{n}_3) \simeq \bigoplus_{k_1+k_2+k_3=k} \left(\bigwedge^{k_1} \mathfrak{n}_1 \otimes \bigwedge^{k_2} \mathfrak{n}_2 \otimes \bigwedge^{k_3} \mathfrak{n}_3 \right) \\ &\simeq \bigoplus_r \bigoplus_{\substack{k_1+k_2+k_3=k \\ k_1+2k_2+3k_3=r}} \left(\bigwedge^{k_1} \mathfrak{n}_1 \otimes \bigwedge^{k_2} \mathfrak{n}_2 \otimes \bigwedge^{k_3} \mathfrak{n}_3 \right) \simeq \bigoplus_r W_r^k. \end{aligned}$$

con lo que queda demostrado 1.

2. Sea el complejo de Koszul

$$0 \rightarrow \bigwedge^n \mathfrak{n} \xrightarrow{\partial_n} \bigwedge^{n-1} \mathfrak{n} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \dots \xrightarrow{\partial_2} \bigwedge^2 \mathfrak{n} \xrightarrow{\partial_1} \bigwedge \mathfrak{n} \xrightarrow{\partial_0} \mathbb{C} \xrightarrow{\partial_0} 0,$$

con $\partial_p : \bigwedge^p \mathfrak{n} \rightarrow \bigwedge^{p-1} \mathfrak{n}$ la derivada del complejo que está definida como

$$\partial_p(x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_p) = \sum_{i < j} (-1)^{i+j+1} [x_i, x_j] \wedge x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge \widehat{x}_i \wedge \dots \wedge \widehat{x}_j \wedge \dots \wedge x_p.$$

Luego podemos tomar $\partial_k|_{W_r^k}$. Veamos que la imagen de $\partial_k|_{W_r^k}$ está contenida en W_r^{k-1} . Sea $x \in W_r^k$, luego

$$x = a_1 \wedge \dots \wedge a_{k_1} \wedge b_1 \wedge \dots \wedge b_{k_2} \wedge c_1 \wedge \dots \wedge c_{k_3}$$

con $k_1 + k_2 + k_3 = k$ y $k_1 + 2k_2 + 3k_3 = r$. Si $x = 0$ se cumple trivialmente. Supongamos que $x \neq 0$, esto es el conjunto $\{a_1, \dots, a_{k_1}, b_1, \dots, b_{k_2}, c_1, \dots, c_{k_3}\}$ es linealmente independiente. Por ser $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_1 \oplus \mathfrak{n}_2 \oplus \mathfrak{n}_3$, un álgebra de Lie 3-pasos graduadas, $[\mathfrak{n}_i, \mathfrak{n}_j] \subset \mathfrak{n}_{i+j}$ y por lo tanto los únicos sumandos distintos de ceros serán cuando haga el corchete entre elementos de \mathfrak{n}_1 o entre un elemento de \mathfrak{n}_1 y otro de \mathfrak{n}_2 . Esto es

$$\begin{aligned} & \partial_k|_{W_r^k}(a_1 \wedge \dots \wedge a_{k_1} \wedge b_1 \wedge \dots \wedge b_{k_2} \wedge c_1 \wedge \dots \wedge c_{k_3}) = \\ & \sum_{i < j} (-1)^{i+j+1} [a_i, a_j] a_1 \wedge \dots \wedge \widehat{a}_i \wedge \dots \wedge \widehat{a}_j \wedge \dots \wedge a_{k_1} \wedge b_1 \wedge \dots \wedge b_{k_2} \wedge c_1 \wedge \dots \wedge c_{k_3} + \\ & \sum (-1)^{i+j+1} [a_i, b_j] a_1 \wedge \dots \wedge \widehat{a}_i \wedge a_{k_1} \wedge b_1 \wedge \dots \wedge \widehat{b}_j \wedge \dots \wedge b_{k_2} \wedge c_1 \wedge \dots \wedge c_{k_3}. \end{aligned}$$

Para los primeros sumandos tenemos que $[a_i, a_j] \in \mathfrak{n}_2$. Si este es 0 o si $\{b_1 \dots b_{k_2}, [a_i, a_j]\}$ es un conjunto linealmente dependiente ese término es 0 y por lo tanto pertenece a W_r^{k-1} . Sino, si el conjunto $\{b_1 \dots b_{k_2}, [a_i, a_j]\}$ es linealmente independiente, podemos llamar $[a_i, a_j] = b_{k_2+1}$ tal que $b_1 \wedge \dots \wedge b_{k_2} \wedge b_{k_2+1} \neq 0$. Luego $k'_1 = k_1 - 2$, $k'_2 = k_2 + 1$, $k'_3 = k_3$ y por lo tanto

$$\begin{aligned} k'_1 + k'_2 + k'_3 &= k_1 - 2 + k_2 + 1 + k_3 = k - 1 \\ k'_1 + 2k'_2 + 3k'_3 &= k_1 - 2 + 2(k_2 + 1) + 3k_3 = k_1 + 2k_2 + 3k_3 = r. \end{aligned}$$

Por lo tanto este término está en W_r^{k-1} .

Para los otros sumandos tenemos que $[a_i, b_j] \in \mathfrak{n}_3$. Si este es 0 o el conjunto $\{c_1 \dots c_{k_3}, [a_i, b_j]\}$ es linealmente dependiente ese término es 0 y por lo tanto pertenece a W_r^{k-1} . Sino, si el conjunto $\{c_1 \dots c_{k_3}, [a_i, b_j]\}$ es linealmente independiente, podemos llamar $[a_i, b_j] = c_{k_3+1}$, tal que $c_1 \wedge \dots \wedge c_{k_3} \wedge c_{k_3+1} \neq 0$. Luego $k'_1 = k_1 - 1$, $k'_2 = k_2 - 1$, $k'_3 = k_3 + 1$ y por lo tanto

$$\begin{aligned} k'_1 + k'_2 + k'_3 &= k_1 - 1 + k_2 - 1 + k_3 + 1 = k - 1. \\ k'_1 + 2k'_2 + 3k'_3 &= k_1 - 1 + 2(k_2 - 1) + 3(k_3 + 1) = k_1 + 2k_2 + 3k_3 = r. \end{aligned}$$

Por lo tanto este término está en W_r^{k-1} .

Luego nos queda, definiendo $\partial_k = \partial_k|_{W_r^k} : W_r^k \rightarrow W_r^{k-1}$ una derivación y podemos definir el complejo W_r^*

$$0 \rightarrow W_r^n \xrightarrow{\partial_n} W_r^{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \dots \xrightarrow{\partial_2} W_r^1 \xrightarrow{\partial_1} W_r^0 \xrightarrow{\partial_0} 0.$$

3. Como para cada r tenemos definido el complejo W_r^* y del hecho de que $\bigwedge^k \mathfrak{n} = \bigoplus_r W_r^k$ queda

$$\begin{aligned} H_*(\mathfrak{n}) &= \bigoplus_{r=0}^{d_1+2d_2+3d_3} H_*(W_r^\bullet), \text{ donde } d_i = |\mathfrak{n}_i| \text{ con } i = 1, 2, 3. \text{ Y por lo tanto} \\ |H_*(\mathfrak{n})| &= \sum_{r=0}^{d_1+2d_2+3d_3} |H_*(W_r^*)|. \end{aligned}$$

4. Es una consecuencia inmediata de la definición 3.7 y la Proposición 2.4. Por lo tanto queda demostrada la proposición. \square

Queremos probar que $L(p) = \sum_r \left| |W_r^{par}| - |W_r^{impar}| \right|$, donde p es el polinomio de graduación de \mathfrak{n} . Antes de demostrarlo veamos primero un ejemplo un ejemplo.

Ejemplo.

Sea $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_1 \oplus \mathfrak{n}_2 \oplus \mathfrak{n}_3$, con $d_1 = |\mathfrak{n}_1| = 2$, $d_2 = |\mathfrak{n}_2| = 3$ y $d_3 = |\mathfrak{n}_3| = 5$. Calculemos W_5^3 . Sea

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_1 &= \{a_1, a_2\} \text{ una base de } \mathfrak{n}_1, \\ \mathfrak{B}_2 &= \{b_1, b_2, b_3\} \text{ una base de } \mathfrak{n}_2, \\ \mathfrak{B}_3 &= \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5\} \text{ una base de } \mathfrak{n}_3. \end{aligned}$$

Para poder contar la dimensión W_5^3 , encontremos los posibles valores de k_1, k_2, k_3 , tales que

$$k_1 + k_2 + k_3 = 3 \text{ y } k_1 + 2k_2 + 3k_3 = 5.$$

Las posibilidades son

$$k_1 = 1, k_2 = 2, k_3 = 0 \text{ o } k_1 = 2, k_2 = 0, k_3 = 1,$$

luego una base del espacio W_5^3 estará dada por todas las formas de elegir 1 elementos de \mathfrak{B}_1 y 2 de \mathfrak{B}_2 mas todas las formas de elegir 2 elemento de \mathfrak{B}_1 por todas las formas de elegir 1 elemento de \mathfrak{B}_3 Luego la dimensión de W_5^3 será

$$|W_5^3| = \binom{2}{1} \binom{3}{1} + \binom{2}{2} \binom{5}{1} = 11.$$

Teniendo en cuenta que $0 \leq k_1 \leq 2$, $0 \leq k_2 \leq 3$, $0 \leq k_0 \leq 5$, $0 \leq k \leq 10$, y $k \leq r \leq 2 + 6 + 15 = 23$. Si fijo por ejemplo $k = 3$ los valores de las dimensiones de los W_r^3 para los distintos valores posibles de r serán

$$\begin{array}{rcccccccc} \wedge^3 \mathfrak{n} & = & |W_4^3| & + & |W_5^3| & + & |W_6^3| & + & |W_7^3| & + & |W_8^3| & + & |W_9^3| \\ 120 & = & 3 & + & 11 & + & 31 & + & 35 & + & 30 & + & 10. \end{array}$$

Por otro lado, si fijamos $r = 5$ y tomamos todos los k posibles tenemos únicamente los espacios W_5^2 y W_5^3 con dimensiones distintas de cero, siendo $|W_5^2| = \binom{3}{1} \binom{5}{1} = 15$ y $|W_5^3| = 11$. Demostremos este resultado en general.

Teorema 3.9. Si $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_1 \oplus \mathfrak{n}_2 \oplus \mathfrak{n}_3$ un álgebra de Lie 3-pasos nilpotente graduada, con $d_i = |\mathfrak{n}_i|$. Sea $p(x) = (1 - x)^{d_1} (1 - x^2)^{d_2} (1 - x^3)^{d_3}$ entonces

$$L(p) = \sum_r \left| |W_r^{par}| - |W_r^{impar}| \right|,$$

y por lo tanto

$$|H_*(\mathfrak{n})| \geq L(p).$$

Demostración. Dado un k y un r , sean $0 \leq k_i \leq d_i$, tales que $k = k_1 + k_2 + k_3$ y $r = k_1 + 2k_2 + 3k_3$ entonces

$$|W_r^k| = \sum_{k_1+k_2+k_3=k} \binom{d_1}{k_1} \binom{d_2}{k_2} \binom{d_3}{k_3},$$

donde la suma es sobre todos los k_1, k_2, k_3 que verifiquen lo pedido.

Por otro lado si consideramos el polinomio $p(x) = (1-x)^{d_1}(1-x^2)^{d_2}(1-x^3)^{d_3}$, el coeficiente que acompaña a x^r , será la suma para cada terna (k_1, k_2, k_3) , tales que $0 \leq k_i \leq d_i$ y $r = k_1 + 2k_2 + 3k_3$, esto es

$$\begin{aligned} & \sum_{k_1+k_2+k_3} \binom{d_1}{k_1} \binom{d_2}{k_2} \binom{d_3}{k_3} (-1)^{k_1+k_2+k_3} = \\ & = \sum_{k_1+k_2+k_3=par} \binom{d_1}{k_1} \binom{d_2}{k_2} \binom{d_3}{k_3} - \sum_{k_1+k_2+k_3=impar} \binom{d_1}{k_1} \binom{d_2}{k_2} \binom{d_3}{k_3} \\ & = |W_r^{par}| - |W_r^{impar}|. \end{aligned}$$

Por lo tanto la longitud del polinomio, o sea la suma de los valores absolutos de los coeficientes será

$$L(p) = \sum_{r=0}^{d_1+2d_2+3d_3} ||W_r^{pares}| - |W_r^{impares}||$$

Además de la Proposición 3.8 resulta

$$|H_*(\mathfrak{n})| = \sum_{r=0}^{d_1+2d_2+3d_3} |H_*(W_r^*)| \geq L(p),$$

que es lo que se quería demostrar. \square

3.4. Problema abordado en la Tesis

La CRT permanece abierta incluso para las álgebras de Lie 3-pasos nilpotentes graduadas, esto es $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_1 \oplus \mathfrak{n}_2 \oplus \mathfrak{n}_3$.

Un objetivo de esta tesis es encontrar dimensiones de álgebras de Lie tres pasos nilpotentes, hasta las cuales se puede asegurar que vale la CRT.

Veremos que para álgebras de Lie 3-pasos nilpotentes graduadas (en contraste de lo que sucede para las 2-pasos nilpotentes) la cota de la homología dada por la longitud del polinomio no alcanza para probar la CRT.

El trabajo consta de dos partes

1. Se estudian las dimensiones de las álgebras de Lie $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_1 \oplus \mathfrak{n}_2 \oplus \mathfrak{n}_3$ tales que

$$L(p) \geq 2^{\dim(\mathfrak{g}(\mathfrak{n}))},$$

y de este modo se encuentran álgebras de Lie 3-pasos nilpotentes y graduadas, para las que se puede asegurar que se cumple la CRT.

En particular se demostrará que toda álgebra de Lie 3-pasos nilpotente y graduada con dimensión menor que 99 verifica la CRT.

2. Se construyen álgebras de Lie $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_1 \oplus \mathfrak{n}_2 \oplus \mathfrak{n}_3$ tales que

$$L(p) < 2^{\dim(\mathfrak{g}(\mathfrak{n}))},$$

lo que nos dice que la cota de la dimensión de la homología por la longitud del polinomio no alcanza para probar la CRT en estas álgebras. Sin embargo queda abierta la pregunta si para estas álgebras vale o no la CRT.

Capítulo 4

Álgebras de Lie con polinomio corto

4.1. Introducción

Recordemos que si $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_1 \oplus \mathfrak{n}_2 \oplus \dots \oplus \mathfrak{n}_k$ es un álgebra de Lie k -pasos nilpotente graduada y $p = (1 - x)^{d_1} \dots (1 - x^k)^{d_k}$ con $d_i = \dim \mathfrak{n}_i$ entonces

$$\dim(H_*(\mathfrak{n})) \geq L(p).$$

$L(p)$ es la suma de los valores absolutos de los coeficientes de p , como vimos en el capítulo anterior (3.1). En este capítulo compararemos $L(p)$ con $2^{\dim(\mathfrak{z})}$ para diversos ejemplos de álgebras de Lie $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_1 \oplus \mathfrak{n}_2 \oplus \mathfrak{n}_3$ 3-pasos nilpotentes graduadas.

Comencemos introduciendo los siguientes conceptos. A lo largo de todo el capítulo $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_1 \oplus \mathfrak{n}_2 \oplus \mathfrak{n}_3$ será un álgebra de Lie 3-pasos nilpotente graduada, d_i denotará la dimensión de \mathfrak{n}_i y p será el polinomio asociado a la graduación $p(x) = (1 - x)^{d_1} \dots (1 - x^k)^{d_k}$. Además \mathfrak{z} será el centro de \mathfrak{n} .

Definición 4.1. *Un álgebra de Lie 3-pasos nilpotente se dice de **polinomio largo** si admite una graduación $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_1 \oplus \mathfrak{n}_2 \oplus \mathfrak{n}_3$ tal que*

$$L(p) \geq 2^{\dim(\mathfrak{z})}.$$

*Diremos que álgebra de Lie 3-pasos nilpotente (graduable) es de **polinomio corto** si no es de polinomio largo, es decir que si para toda graduación $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_1 \oplus \mathfrak{n}_2 \oplus \mathfrak{n}_3$ se cumple que $L(p) < 2^{\dim(\mathfrak{z})}$.*

Observar que para toda álgebra de Lie de polinomio largo se cumple la CRT. Además, si definimos los conceptos análogos para álgebras de Lie 2-pasos nilpotentes, resulta que toda álgebra de Lie 2-pasos nilpotente es de polinomio largo. (Ver Teorema 3.2).

El objetivo de este capítulo es construir una familia de álgebras de Lie 3-pasos nilpotentes de polinomio corto y mostrar que toda álgebra de Lie 3-pasos nilpotente, de dimensión menor que 99, es de polinomio largo.

Definición 4.2. *Diremos que una 4-upla de números naturales (d_1, d_2, d_3, z_2) es **mala** si existe un álgebra $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_1 \oplus \mathfrak{n}_2 \oplus \mathfrak{n}_3$ 3-pasos nilpotente graduada indescomponible de polinomio corto tal que $d_i = \mathfrak{n}_i$, con $i = 1, 2, 3$, y z_2 es la dimensión del espacio vectorial $\mathfrak{z} \cap \mathfrak{n}_2$. (Ver Lema 1.51). En particular, dada una 4-upla mala (d_1, d_2, d_3, z_2) se cumple que $L(p) \leq 2^{z_2 + d_3}$.*

4.2. Propiedades básicas de los números malos

Comenzaremos por encontrar algunas propiedades que debe cumplir una 4-upla de números malos.

Definición 4.3. Sea $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_1 \oplus \mathfrak{n}_2 \oplus \mathfrak{n}_3$ un álgebra de Lie 3-pasos nilpotente graduada e indescomponible. Sean $\mathfrak{z}_2 = \mathfrak{n}_2 \cap \mathfrak{z}$, \mathfrak{n}_2^0 un complemento de $[\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_1]$ en \mathfrak{n}_2 y \mathfrak{n}_2^1 un complemento de \mathfrak{z}_2 en $[\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_1]$. (Ver Lema 1.51) Esto es

$$\begin{aligned}\mathfrak{n}_2 &= \mathfrak{n}_2^0 \oplus \mathfrak{n}_2^1 \oplus \mathfrak{z}_2, \\ [\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_1] &= \mathfrak{n}_2^1 \oplus \mathfrak{z}_2.\end{aligned}$$

Denotaremos $d_2^0 = \dim(\mathfrak{n}_2^0)$, $d_2^1 = \dim(\mathfrak{n}_2^1)$, $z_2 = \dim(\mathfrak{z}_2)$ y $z = \dim(\mathfrak{z})$. Es inmediato que

- (i) $d_2 = d_2^0 + d_2^1 + z_2$.
- (ii) $z = d_3 + z_2$.

Proposición 4.4. Sea $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_1 \oplus \mathfrak{n}_2 \oplus \mathfrak{n}_3$ un álgebra de Lie indescomponible de polinomio corto. Entonces d_1 , d_2^0 , d_2^1 , z_2 y d_3 satisfacen las siguientes desigualdades:

1. $d_1, d_2^1, z_2, d_3 > 0$.
2. $d_1(d_2^0 + d_2^1) \geq d_3$.
3. $\binom{d_1}{2} \geq d_2^1 + z_2$.
4. $d_2^0 \leq d_1 d_3$.

Demostración. Si d_1 o d_2^1 o d_3 fuera cero, entonces \mathfrak{n} sería 2-pasos nilpotente y por lo tanto no sería de polinomio corto. Si z_2 fuera cero tendríamos que $\dim \mathfrak{z} = d_3$ y sabemos que (ver Observación 3.3) $L(p) \geq 3^{\frac{d_2}{2}} 2^{d_3} \geq 2^{d_3}$ y por lo tanto \mathfrak{n} no sería de polinomio corto.

Consideremos el corchete

$$[\cdot, \cdot] : \mathfrak{n}_1 \times (\mathfrak{n}_2^0 \oplus \mathfrak{n}_2^1) \rightarrow \mathfrak{n}_3,$$

que es suryectivo por el lema 1.52. Sea $(\mathfrak{n}_1 \otimes \mathfrak{n}_2, \psi)$ el producto tensorial. Como toda toda función bilineal en el producto cartesiano se puede factorizar a través de una función lineal en el producto tensorial, aplicando esto al corchete nos asegura la existencia de $\varphi : \mathfrak{n}_1 \otimes (\mathfrak{n}_2^0 \oplus \mathfrak{n}_2^1) \rightarrow \mathfrak{n}_3$ lineal que hace conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{n}_1 \times (\mathfrak{n}_2^0 \oplus \mathfrak{n}_2^1) & \xrightarrow{[\cdot, \cdot]} & \mathfrak{n}_3 \\ \psi \downarrow & \nearrow \varphi & \\ \mathfrak{n}_1 \otimes (\mathfrak{n}_2^0 \oplus \mathfrak{n}_2^1) & & \end{array}$$

Como $\dim(\mathfrak{n}_1 \otimes (\mathfrak{n}_2^0 \oplus \mathfrak{n}_2^1)) = d_1(d_2^0 + d_2^1)$, y φ es lineal, tenemos que $d_1(d_2^0 + d_2^1) = \dim(\text{Nu } \varphi) + d_3$, y por lo tanto

$$d_1(d_2^0 + d_2^1) \geq d_3.$$

Esto demuestra (2).

Consideremos ahora el corchete $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{n}_1 \times \mathfrak{n}_1 \rightarrow \tilde{\mathfrak{n}}_2$ que es obviamente sobreyectivo y sea $(\mathfrak{n}_1 \wedge \mathfrak{n}_1, \psi)$ el producto exterior. Ahora toda toda función bilineal alternante en el producto cartesiano se puede factorizar a través de una función lineal en el producto exterior, esto nos permite encontrar $\varphi : \mathfrak{n}_1 \wedge \mathfrak{n}_1 \rightarrow \tilde{\mathfrak{n}}_2$ lineal que hace conmutativo el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{n}_1 \times \mathfrak{n}_1 & \xrightarrow{[\cdot, \cdot]} & \tilde{\mathfrak{n}}_2 \\ \psi \downarrow & \nearrow \varphi & \\ \mathfrak{n}_1 \wedge \mathfrak{n}_1 & & \end{array}$$

Como $\dim(\mathfrak{n}_1 \wedge \mathfrak{n}_1) = \binom{d_1}{2}$ y φ lineal, tenemos $\frac{d_1(d_1-1)}{2} = \dim(\text{Nu } \varphi) + \dim(\tilde{\mathfrak{n}}_2)$.

Luego $\frac{d_1(d_1-1)}{2} \geq \dim(\tilde{\mathfrak{n}}_2)$ y $\dim(\tilde{\mathfrak{n}}_2) = d_2^1 + z_2$ por lo tanto $\binom{d_1}{2} \geq d_2^1 + z_2$. Por lo que queda demostrado (3).

Para probar (4), notemos que definición de \mathfrak{n}_2^0 se cumple que $\mathfrak{z} \cap \mathfrak{n}_2^0 = \{0\}$. Sea $\mathfrak{gl}(\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_3)$ el conjunto de transformaciones lineales de \mathfrak{n}_1 en \mathfrak{n}_3 ,

$$\dim(\mathfrak{gl}(\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_3)) = \dim(\mathfrak{n}_1) \cdot \dim(\mathfrak{n}_3) = d_1 \cdot d_3.$$

Definimos $\text{ad} : \mathfrak{n}_2^0 \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_3)$ tal que para cada $x \in \mathfrak{n}_2^0$, $\text{ad } x(y) = [x, y] \in \mathfrak{n}_3$, como ad es lineal entonces

$$\text{Nu}(\text{ad}) = \{x \in \mathfrak{n}_2^0 : \text{ad } x(y_1) = 0 \forall y_1 \in \mathfrak{n}_1\} = \{x \in \mathfrak{n}_2^0 : [x, y_1] = 0 \forall y_1 \in \mathfrak{n}_1\} = \{0\},$$

$y_i \in \mathfrak{n}_i$, $[x, y_1 + y_2 + y_3] = [x, y_1] = 0$ entonces

$$x \in \mathfrak{z}(\mathfrak{n}) \cap \mathfrak{n}_2^0 = \{0\}.$$

Luego $\dim(\mathfrak{n}_2^0) = \dim(\text{Nu}(\text{ad})) + \dim(\text{Im}(\text{ad})) = \dim(\text{Im}(\text{ad})) \leq d_1 \cdot d_3$. y por lo tanto $d_2^0 \leq d_1 \cdot d_3$. Con esto queda demostrada la proposición. \square

Motivados por esta proposición introducimos la siguiente definición:

Definición 4.5. Diremos que una 5-upla de números enteros no negativos $(d_1, d_2^0, d_2^1, z_2, d_3)$ es semi-mala si satisface (1), (2), (3) y (4) de la proposición anterior y además

$$L(p) < 2^{z_2+d_3}.$$

Observemos que a diferencia de una 4-upla mala, una 5-upla semi-mala no necesariamente debe corresponder a una álgebra de Lie polinomio corto.

4.3. La dimensión de las álgebras de Lie de polinomio corto

En esta sección, demostraremos que toda álgebra de Lie 3-pasos nilpotente graduada \mathfrak{n} de polinomio corto tiene dimensión mayor que 22. Por lo tanto, demostramos que toda álgebra de Lie 3-pasos nilpotente graduada \mathfrak{n} con $\dim(\mathfrak{n}) \leq 22$ satisface la CRT.

Experimentalmente veremos que si $(d_1, d_2^0, d_2^1, z_2, d_3)$ es una 5-upla semi-mala entonces $d_1 + d_2^0 + d_2^1 + z_2 + d_3 \geq 99$ y por lo tanto quedaría comprobado que toda álgebra de Lie 3-pasos nilpotente graduada \mathfrak{n} con $\dim(\mathfrak{n}) \leq 98$ satisface la CRT.

Proposición 4.6. Sea $(d_1, d_2^0, d_2^1, z_2, d_3)$ una 5-upla semi-mala entonces $d_1 + z_2 + d_2^0 + d_2^1 + d_3 > 22$, $d_1 \geq 5$ y $d_2^0 + d_2^1 \geq 2$.

Demostración. Por la Observación 3.3 sabemos que $L(p) > 3^{\frac{d_2}{2}} 2^{d_3}$. Por hipótesis $L(p) < 2^{d_3+z_2}$, por lo tanto tenemos la siguiente desigualdad

$$2^{z_2} > 3^{\frac{d_2}{2}}.$$

Tomando logaritmo natural nos queda

$$z_2 > \frac{\ln 3}{\ln 2} \frac{d_2}{2} \geq \frac{3}{2} \frac{d_2}{2} = \frac{3}{4} d_2,$$

luego

$$z_2 > \frac{3}{4} d_2. \quad (4.1)$$

Sea $\xi_1 = \exp(i\frac{\pi}{2})$, luego

$$|p(\xi_1)| = |1 - \xi_1|^{d_1} |1 - \xi_1^2|^{d_2} |1 - \xi_1^3|^{d_3} = 2^{\frac{d_1}{2}} 2^{d_2} 2^{\frac{d_3}{2}}.$$

De la hipótesis $L(p) < 2^{d_3+z_2}$, por lo tanto tenemos la siguiente desigualdad

$$2^{d_3+z_2} > 2^{\frac{d_1}{2}} 2^{d_2} 2^{\frac{d_3}{2}}.$$

luego, tomando logaritmo natural nos queda

$$d_3 + z_2 > \frac{d_1}{2} + d_2 + \frac{d_3}{2},$$

por lo tanto

$$2d_3 + 2z_2 > d_1 + 2d_2 + d_3 = d_1 + 2d_2^0 + 2d_2^1 + 2z_2 + d_3,$$

entonces

$$d_3 > d_1 + 2(d_2^0 + d_2^1).$$

Por ser $(d_1, d_3, z_2, d_2^0, d_2^1)$ se verifica que $d_1(d_2^0 + d_2^1) \geq d_3$. Luego nos queda

$$d_1(d_2^0 + d_2^1) > d_1 + 2(d_2^0 + d_2^1), \quad (4.2)$$

entonces

$$(d_1 - 2)(d_2^0 + d_2^1) > d_1.$$

como $d_1 \neq 0$ entonces $d_1 > 2$ y como d_1 es un natural debe ocurrir que $d_1 \geq 3$, luego

$$(d_2^0 + d_2^1) > \frac{d_1}{(d_1 - 2)}. \quad (4.3)$$

Se deduce, de esta última inecuación, que $(d_2^0 + d_2^1) \geq 2$ pues $\frac{d_1}{(d_1-2)} > 1$ y $(d_2^0 + d_2^1)$ es un entero.

Por hipótesis, por ser $(d_1, d_3, z_2, d_2^0, d_2^1)$ una 5-upla semi-mala se verifica que $d_2^1 + z_2 \leq \binom{d_1}{2}$ y que $d_2^1 \geq 1 > 0$. Además por (4.1)

$$z_2 > \frac{3d_2}{4} \text{ entonces } z_2 > 3(d_2^0 + d_2^1).$$

Luego por (4.3)

$$\binom{d_1}{2} \geq d_2^1 + z_2 > d_2^1 + 3(d_2^0 + d_2^1) > 3\frac{d_1}{(d_1 - 2)},$$

de donde nos queda

$$d_1(d_1 - 1)(d_1 - 2) > 6d_1 \text{ entonces } d_1((d_1 - 1)(d_1 - 2) - 6) > 0.$$

Como d_1 es un natural y resulta mayor que 4, esto dice que $d_1 \geq 5$. Teniendo esto en cuenta y que $(d_2^0 + d_2^1) \geq 2$ resulta

$$d_1 + d_2 + d_3 = d_1 + d_2^0 + d_2^1 + z_2 + d_3 > d_1 + 4(d_2^0 + d_2^1) + d_3 > 2d_1 + 6(d_2^0 + d_2^1) > 10 + 12 = 22.$$

Con lo que queda demostrado. \square

Teorema 4.7. *Sea $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_1 \oplus \mathfrak{n}_2 \oplus \mathfrak{n}_3$ un álgebra de Lie 3-pasos nilpotente graduada e indescomponible tal que $\dim \mathfrak{n} \leq 22$ entonces \mathfrak{n} es de polinomio largo.*

Demostración. Debemos mostrar que $L(p) \geq 2^z$. Si por el contrario, $L(p) < 2^z$, entonces la graduación $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_1 \oplus \mathfrak{n}_2 \oplus \mathfrak{n}_3$, junto con la indescomponibilidad de \mathfrak{n} , daría origen a una 5-upla semi-mala $(d_1, d_2^0, d_2^1, z_2, d_3)$ tal que $d_1 + d_2^0 + d_2^1 + z_2 + d_3 \leq 22$ lo cual contradice la proposición anterior. \square

Corolario 4.8. *Sea $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_1 \oplus \mathfrak{n}_2 \oplus \mathfrak{n}_3$ un álgebra de Lie 3-pasos nilpotente graduada (no necesariamente indescomponible) tal que $\dim \mathfrak{n} \leq 22$ entonces \mathfrak{n} la CRT, esto es*

$$\dim(H^*(\mathfrak{n})) \geq 2^{\dim(\mathfrak{g})}.$$

Demostración. Del teorema es inmediato que si $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_1 \oplus \mathfrak{n}_2 \oplus \mathfrak{n}_3$ un álgebra de Lie 3-pasos nilpotente graduada e indescomponible tal que $\dim(\mathfrak{n}) \leq 22$, entonces se cumple CRT.

Si $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_1 \oplus \mathfrak{n}_2 \oplus \mathfrak{n}_3$ un álgebra de Lie 3-pasos nilpotente graduada, se puede descomponer en suma de \mathfrak{g}_i álgebras de Lie indescomponibles, todas ellas nilpotentes a lo sumo tres pasos y graduadas, por lo tanto, para todas las \mathfrak{g}_i , se cumple la CRT.

Como $H(\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2) = H(\mathfrak{g}_1) \otimes H(\mathfrak{g}_2)$ y $\dim(\mathfrak{z}(\mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2)) = \dim(\mathfrak{z}(\mathfrak{g}_1)) + \dim(\mathfrak{z}(\mathfrak{g}_2))$, resulta el corolario. \square

4.3.1. Existencia números malos

En esta sección queremos encontrar ejemplos de 5-uplas semi-malas. Para ello definimos el conjunto

$$\mathcal{M} = \{x = (d_1, d_2^0, d_2^1, z_2, d_3) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^5 : x \text{ cumple (1), (2), (3) y (4) de la Proposición 4.4}\}.$$

Además llamamos

$$\mathcal{M}_{d_1, d_2, d_3} = \{x \in \mathcal{M} : x = (d_1, d_2^0, d_2^1, z_2, d_3) \text{ y } d_2^0 + d_2^1 + z_2 = d_2\}.$$

Definimos ahora la función $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{L(p)}{2^{z_2 + d_3}}, \quad p = (1-x)^{d_1} (1-x^2)^{d_2^0 + d_2^1 + z_2} (1-x^3)^{d_3}.$$

De este modo, una 5-upla $x = (d_1, d_2^0, d_2^1, z_2, d_3) \in \mathcal{M}$ es semi-mala si y sólo si $f(x) < 1$. Además fijados naturales d_1, d_2 y d_3 , el mínimo de f en $\mathcal{M}_{d_1, d_2, d_3}$ se alcanza en el $x = (d_1, d_2^0, d_2^1, z_2, d_3) \in \mathcal{M}_{d_1, d_2, d_3}$ que tenga el máximo valor posible en z_2 .

Proposición 4.9. *Sean d_1, d_2 y d_3 tres números naturales. Si $\mathcal{M}_{d_1, d_2, d_3} \neq \emptyset$, entonces entre todos los $x \in \mathcal{M}_{d_1, d_2, d_3}$ uno, no necesariamente único, de los que tiene el mayor valor en z_2 es $x = (d_1, d_2^0, d_2^1, d_2 - d_2^0 - d_2^1, d_3)$ con*

$$d_2^0 = \max\{0, d_2 - \binom{d_1}{2}\}, \quad d_2^1 = \max\{1, \lceil \frac{d_3}{d_1} \rceil - d_2^0\}.$$

Demostración. Es claro que z_2 será máximo si $d_2^0 + d_2^1$ es mínimo. De la Proposición 4.4 sabemos que

$$\begin{aligned} d_2^0 + d_2^1 &\geq \lceil \frac{d_3}{d_1} \rceil \\ d_2^0 &\geq d_2 - \binom{d_1}{2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, si definimos d_2^0 y d_2^1 como indica la proposición resulta que $d_2^0 + d_2^1$ es mínimo.

Además, el hecho de que $\mathcal{M}_{d_1, d_2, d_3} \neq \emptyset$ implica que $d_1 d_3 \geq d_2 - \binom{d_1}{2}$ y por lo tanto $d_2^0 \leq d_1 d_3$, lo que nos asegura que el punto $x = (d_1, d_2^0, d_2^1, d_2 - d_2^0 - d_2^1, d_3)$ está en $\mathcal{M}_{d_1, d_2, d_3}$. \square

La proposición nos dice que

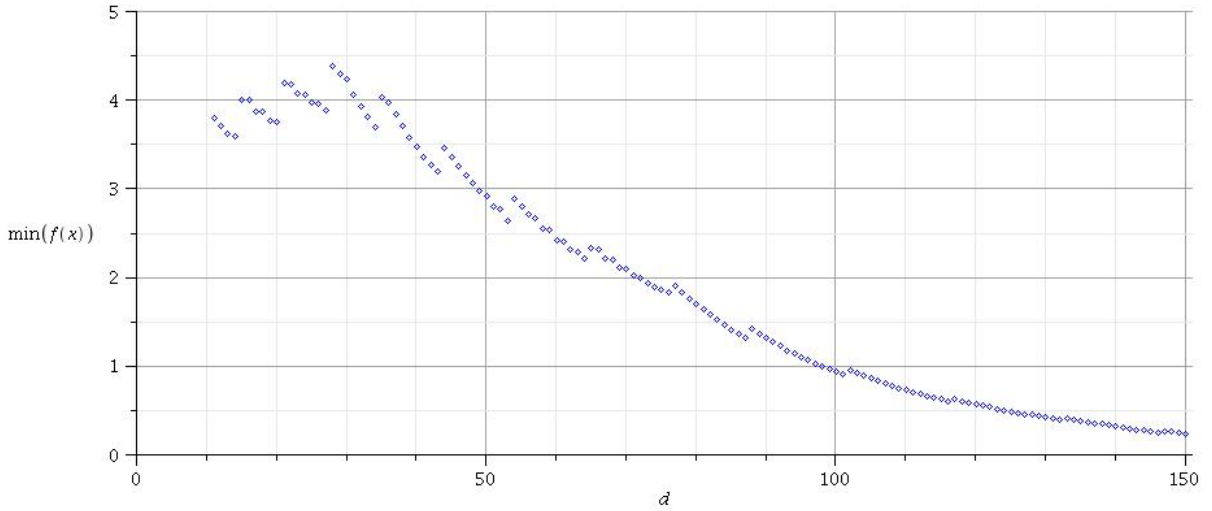
$$\min\{f(x) : x \in \mathcal{M}_{d_1, d_2, d_3}\} = \frac{L((1-x)^{d_1}(1-x^2)^{d_2}(1-x^3)^{d_3})}{2^{d_2+d_3 - \max\{0, d_2 - \binom{d_1}{2}\} - \max\{1, \lceil \frac{d_3}{d_1} \rceil - d_2^0\}}}.$$

Con esta fórmula podemos ahora experimentar con la computadora para encontrar 5-uplas semi-malas en $\mathcal{M}_{d_1, d_2, d_3}$. En particular, nos interesa fijar un natural d y recorrer todas las particiones ordenadas $d = d_1 + d_2 + d_3$ de d para encontrar 5-uplas semi-malas en $\bigcup_{d_1+d_2+d_3=d} \mathcal{M}_{d_1, d_2, d_3}$ que potencialmente pueden dar origen una álgebra de Lie 3-pasos nilpotente graduada de dimensión d de polinomio corto.

Experimentalmente comprobamos que el mínimo d para el cual existe una partición ordenada $d = d_1 + d_2 + d_3$ tal que $\mathcal{M}_{d_1, d_2, d_3}$ contiene una 5-upla semi-mala x es $d = 99 = 11 + 55 + 33$ y $f(x) = 0,9724$.

A continuación presentamos un gráfico de la función

$$d \mapsto \min \left\{ f(x) = \frac{L(p)}{2^{z_2+d_3}} : x \in \bigcup_{d_1+d_2+d_3=d} \mathcal{M}_{d_1, d_2, d_3} \right\}.$$



Para realizar este análisis utilizamos el programa MAPLE. Todas las 5-uplas semi-malas encontradas tienen $d_1 > 10$.

4.4. Existencia de álgebras de Lie de polinomio corto

En esta sección construiremos una familia de álgebras de Lie de polinomio corto.

4.4.1. Definición de la familia $\mathfrak{n}(n)$

En lo que sigue, si A es un conjunto, denotamos con $\langle A \rangle$ el espacio vectorial (libre) con base A . Para cada natural n , sean

$$\begin{aligned} E &= E_n = \langle \{e_i : i = 1, \dots, n\} \rangle, & U &= U_n = \langle \{u_i : i = 1, \dots, n\} \rangle, \\ X &= X_n = \langle \{x_i : i = 1, \dots, n\} \rangle, & Y &= Y_n = \langle \{y_i : i = 1, \dots, n\} \rangle. \end{aligned}$$

Empezaremos definiendo, para todo $n \in \mathbb{N}$, el siguiente espacio vectorial:

$$\mathfrak{n}(n) = E \oplus \langle \{a, b, x, u, y\} \rangle \oplus \Lambda^2 E \oplus \langle \{c\} \rangle \oplus X \oplus U \oplus Y \oplus \langle \{f, h\} \rangle.$$

En adelante \mathfrak{n} denotará $\mathfrak{n}(n)$.

Queremos dar a \mathfrak{n} una estructura de álgebra de Lie de manera que resulte 3-pasos nilpotente y graduada. Con ese objetivo, y antes de definir el corchete de Lie, comenzaremos eligiendo los subespacios \mathfrak{n}_1 , \mathfrak{n}_2 y \mathfrak{n}_3 correspondientes a la futura graduación de \mathfrak{n} .

Para empezar, sea

$$\mathfrak{n}_1 = E_n \oplus \langle \{a, b, x\} \rangle.$$

Si $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ es una base de E , entonces

$$\mathfrak{B}_1(B) = \{e_1, e_2, \dots, e_n, a, b, x\}$$

es una base ordenada de \mathfrak{n}_1 y $d_1 = \dim(\mathfrak{n}_1) = n + 3$.

Ahora definimos

$$\mathfrak{n}_2 = \langle \{u, y\} \rangle \oplus \Lambda^2 E_n \oplus \langle \{c\} \rangle \oplus X_n.$$

Entonces $\{e_i \wedge e_j : 1 \leq i < j \leq n\}$ es una base de $\Lambda^2 E$, y $\{x_i = x \otimes e_i : 1 \leq i \leq n\}$ es una base de X , luego

$$\mathfrak{B}_2(B) = \{u, y, c\} \cup \{e_i \wedge e_j : 1 \leq i < j \leq n\} \cup \{x_i : 1 \leq i \leq n\}$$

resulta una base ordenada de \mathfrak{n}_2 (elegimos el orden lexicográfico para ordenar los $e_i \wedge e_j$).

Claramente $d_2 = \dim(\mathfrak{n}_2) = \frac{n(n-1)}{2} + n + 3 = \frac{n(n+1)}{2} + 3$.

Finalmente definimos

$$\mathfrak{n}_3 = U_n \oplus Y_n \oplus \langle \{f, h\} \rangle.$$

En este caso una base ordenada de \mathfrak{n}_3 queda

$$\mathfrak{B}_3(B) = \{u_1, \dots, u_n, y_1, \dots, y_n, f, g\}$$

y es claro que $d_3 = \dim(\mathfrak{n}_3) = 2n + 2 = 2(n + 1)$. En resumen

$$d_1 = n + 3; \quad d_2 = 3 + \frac{n(n+1)}{2}; \quad d_3 = 2(n+1);$$

$$d_2^0 = 2; \quad d_2^1 = 1; \quad z_2 = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Como casi siempre n estará fijo, haremos un pequeño abuso de notación y usaremos simplemente E , U , X e Y para denotar los espacios E_n , U_n , X_n e Y_n

De ahora en más, elegiremos

$$\mathfrak{B}(B) = \mathfrak{B}_1(B) \cup \mathfrak{B}_2(B) \cup \mathfrak{B}_3(B)$$

como base ordenada de \mathfrak{n} . Recordemos que la base $\mathfrak{B}(B)$ de \mathfrak{n} depende de la base ordenada B elegida en E .

Ahora estamos en condiciones de definir el corchete, el cual definiremos sobre los elementos de esta base y extenderemos linealmente.

Comenzamos por la siguiente tabla que representa $[\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_1]$:

$[\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_1]$	e_1	e_2	\dots	e_n	x	a	b
e_1	0	$e_1 \wedge e_2$	\dots	$e_1 \wedge e_n$	x_1	0	0
e_2	$e_2 \wedge e_1$	0	\dots	$e_2 \wedge e_n$	x_2	0	0
\vdots	\vdots	\vdots	\dots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
e_n	$e_n \wedge e_1$	$e_n \wedge e_2$	\dots	0	x_n	0	0
x	$-x_1$	$-x_2$	\dots	$-x_n$	0	0	0
a	0	0	0	0	0	0	c
b	0	0	0	0	0	$-c$	0

En segundo lugar, damos la siguiente tabla que representa $[\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2]$:

$[\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2]$	u	y	$\Lambda^2 E$	c	x_1	\dots	x_n
e_1	u_1	y_1	0	0	0	0	0
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
e_n	u_n	y_n	0	0	0	0	0
a	0	f	0	h	0	0	0
b	h	h	0	0	0	0	0
x	f	h	0	0	0	0	0

Finalmente, definimos $[\mathfrak{n}_2, \mathfrak{n}_1]$ por antisimetría y por 0 el resto de los corchetes. A continuación exhibimos la tabla completa del corchete en la base dada de \mathfrak{n} :

$[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]$	e_1	\dots	e_n	a	b	x	u	y	$\Lambda^2 E$	c	X	U	Y	f	h
e_1	0	\dots	$e_1 \wedge e_n$	0	0	x_1	u_1	y_1	0	0	0	0	0	0	0
\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
e_n	$e_n \wedge e_1$	\dots	0	0	0	x_n	u_n	y_n	0	0	0	0	0	0	0
a	0	\dots	0	0	c	0	0	f	0	h	0	0	0	0	0
b	0	\dots	0	$-c$	0	0	h	h	0	0	0	0	0	0	0
x	$-x_1$	\dots	$-x_n$	0	0	0	f	h	0	0	0	0	0	0	0
u	$-u_1$	\dots	$-u_n$	0	$-h$	$-f$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
y	$-y_1$	\dots	$-y_n$	$-f$	$-h$	$-h$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\Lambda^2 E$	0	\dots	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
c	0	\dots	0	$-h$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
xV	0	\dots	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
uV	0	\dots	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
yV	0	\dots	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
f	0	\dots	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
h	0	\dots	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Proposición 4.10. Para todo $n \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{n}(n)$ es un álgebra de Lie 3-pasos nilpotente graduada.

Demostración. Para ver que cumple \mathfrak{n} es un álgebra de Lie, sólo falta verificar que se cumple la identidad de Jacobi en los elemento de la base.

Por construcción $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_1 \oplus \mathfrak{n}_2 \oplus \mathfrak{n}_3$ con \mathfrak{n}_i espacios vectoriales tales que $\mathfrak{n}_i \cap \mathfrak{n}_j = \{0\}$ y además $[\mathfrak{n}_i, \mathfrak{n}_j] \subset \mathfrak{n}_{i+j}$.

Dado $t, v, w \in \mathfrak{n}$, tales que $t = t_1 + t_2 + t_3$, $v = v_1 + v_2 + v_3$, $w = w_1 + w_2 + w_3$, con $t_i, v_i, w_i \in \mathfrak{n}_i$ se observa que $[[t, v], w] = [[t_1, v_1], w_1]$, pues al aplicar la ley distributiva en el corchete el resto de los sumandos son cero. Luego podemos suponer que t, v y w son elementos de la base de \mathfrak{n}_1 .

1^{er} Caso: Sean $t, v, w \in E \oplus \langle x \rangle$. De la tabla tenemos que $[t, v], [w, t], [v, w] \in \Lambda^2 E \oplus xV \subset \mathfrak{z}$, por lo tanto

$$[[t, v], w] = [[w, t], v] = [[v, w], t] = 0 \Rightarrow [[t, v], w] + [[w, t], v] + [[v, w], t] = 0.$$

Proposición 4.13. *Si $D \in \text{Der}(\mathfrak{n})_1$ entonces la matriz de D en la base $\mathfrak{B}(B)$, para cualquier base B de E , es triangular inferior.*

Demostración. Observemos que necesitamos comprobar que para cada elemento $w \in \mathfrak{B}(B)$, las coordenadas de $D(w)$ son nulas en los vectores de la base que se encuentran a la izquierda de w según el orden establecido en $\mathfrak{B}(B)$.

Antes de empezar, recordemos del Lema 1.54, que se verifica:

- . $D(\mathfrak{n}') \subset \mathfrak{n}'$.
- . $D([\mathfrak{n}, \mathfrak{n}']) \subset [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}']$.
- . $D(\mathfrak{z}(\mathfrak{n})) \subset \mathfrak{z}(\mathfrak{n})$.

Como durante la prueba necesitaremos trabajar asiduamente con coordenadas en la base $\mathfrak{B}(B)$, usaremos la siguiente notación: si $v \in \mathfrak{n}$ y $w \in \mathfrak{B}(B)$, $\lambda_w(v)$ denotará la coordenada de v en w . Además, para no recargar la notación, $\lambda_w(Dv)$ denotará la coordenada de $D(v)$ en w .

1. De la definición de \mathfrak{n} , es claro que $[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}'] = \langle h \rangle$ y del Lema 1.54 resulta que $D(h) = \lambda_h(Dh)h$.
2. Por definición, $f = [x, u] = [a, y]$. Luego

$$D(f) = D([x, u]) = D([a, y]) \quad (*)$$

entonces

$$[D(x), u] + [x, D(u)] = [D(a), y] + [a, D(y)] \quad (**)$$

Observando la tabla de \mathfrak{n} nos queda

$$\begin{aligned} [D(x), u] &= \sum \lambda_{e_i}(Dx)u_i + \lambda_b(Dx)h + \lambda_x(Dx)f \\ [x, D(u)] &= -\sum \lambda_{e_i}(Du)x_i + \lambda_y(Du)h + \lambda_u(Du)f \\ [D(a), y] &= \sum \lambda_{e_i}(Da)y_i + (\lambda_b(Da) + \lambda_x(Da))h + \lambda_a(Da)f \\ [a, D(y)] &= \lambda_b(Dy)c + \lambda_c(Dy)h + \lambda_y(Dy)f \end{aligned}$$

De la igualdad (**) deducimos

$$\lambda_{e_i}(Dx) = \lambda_{e_i}(Du) = \lambda_{e_i}(Da) = 0 \text{ para } i = 1, 2, \dots, n. \text{ Además } \lambda_b(Dy) = 0. \quad (4.5)$$

Notemos que hemos probado que las coordenadas de $D(a)$, $D(x)$ y $D(u)$ en los e_i son nulas.

Además, de (*) obtenemos

$$\begin{aligned} D(f) &= (\lambda_b(Dx) + \lambda_y(Du))h + (\lambda_x(Dx) + \lambda_u(Du))f \\ &= (\lambda_b(Da) + \lambda_x(Da) + \lambda_c(Dy))h + (\lambda_a(Da) + \lambda_y(Dy))f \end{aligned}$$

3. Por como está definido $\text{Der}(\mathfrak{n})_1$ sabemos que $D(e_i)$ sólo es combinación lineal de $a, b, x, u, y, e_1 \wedge e_2, \dots, e_1 \wedge e_n, \dots, e_{n-1} \wedge e_n, c, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_n, y_1, \dots, y_n, f, h$.

Luego, para todo $1 \leq i < j \leq n$,

$$\begin{aligned} D(e_i \wedge e_j) = D([e_i, e_j]) &= [D(e_i), e_j] + [e_i, D(e_j)] = \\ &= -\lambda_x(De_i)x_j - \lambda_u(De_i)u_j - \lambda_y(De_i)y_j \\ &\quad + \lambda_x(De_j)x_i + \lambda_u(De_j)u_i + \lambda_y(De_j)y_i, \end{aligned}$$

que es lo que necesitamos probar para $D(e_i \wedge e_j)$.

4. Sea $1 \leq i \leq n$. Como $[a, e_i] = 0$, $D([a, e_i]) = [D(a), e_i] + [a, D(e_i)] = 0$,
luego

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_j \lambda_{e_j}(Da)e_j \wedge e_i - \lambda_x(Da)x_i - \lambda_y(Da)y_i - \lambda_u(Da)u_i \\ &+ \lambda_b(De_i)c + \lambda_y(De_i)f + \lambda_c(De_i)h, \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda_{e_j}(Da) \text{ para todo } 1 \leq i \leq n, \\ 0 &= \lambda_x(Da) = \lambda_y(Da) = \lambda_u(Da), \\ 0 &= \lambda_b(De_i) = \lambda_y(De_i) = \lambda_c(De_i) = 0, \text{ para todo } 1 \leq j \leq n. \end{aligned}$$

Luego hemos probado, entre otras cosas, lo requerido para $D(a)$.

5. Análogamente, $[b, e_i] = 0$, luego $[D(b), e_i] + [b, D(e_i)] = D([b, e_i]) = 0$,
entonces (usando de 4. que $\lambda_y(De_i) = 0$),

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_j \lambda_{e_j}(Db)e_j \wedge e_i + \lambda_x(Db)x_i + \lambda_y(Db)y_i + \lambda_u(Db)u_i \\ &- \lambda_a(De_i)c + \lambda_u(De_i)h, \end{aligned}$$

de donde

$$0 = \lambda_{e_j}(Db) \text{ para todo } 1 \leq j \leq n, \quad (4.6)$$

$$0 = \lambda_x(Db) = \lambda_y(Db) = \lambda_u(Db), \quad (4.7)$$

$$0 = \lambda_a(De_i) = \lambda_u(De_i) = 0, \text{ para todo } 1 \leq i \leq n. \quad (4.8)$$

Además $[a, b] = c$, y por lo que ya vimos en 4. y 5., obtenemos

$$D(c) = D([a, b]) = [D(a), b] + [a, D(b)] = \lambda_a(Da)c + \lambda_b(Db)c + \lambda_c(Db)h,$$

por lo que $[D(c), b] = 0$, y como $[b, c] = 0$, resulta $[D(b), c] = 0$. Luego $\lambda_a(Db) = 0$.

Como en 4., concluimos holgadamente lo requerido para $D(b)$.

6. Analizaremos ahora el caso de x, u, y .

a) Empecemos viendo que la coordenada de estos tres vectores en a y b es 0.

Comencemos con $D(x)$: como $[b, x] = 0$, tenemos $[D(x), b] + [x, D(b)] = 0$, y como $[x, D(b)]$ no tiene coordenada en c , tampoco lo tiene $[D(x), b]$. Observando la tabla de corchetes de \mathfrak{n} resulta claro que $D(x)$ no tiene coordenada en a .

Si repetimos este argumento observando que $[a, x] = 0$, obtendremos que $D(x)$ no tiene coordenada en b .

Si ahora lo hacemos considerando $[a, u] = 0$, obtendremos que $D(u)$ no tiene coordenada en b .

Notar además, que el mismo razonamiento, siempre analizando la coordenada c , puede repetirse usando $[u, b] = h$ y $[b, y] = h$ respectivamente para concluir que $D(u)$ y $D(y)$ no tienen coordenadas en a .

Ya hemos visto en 4.5 que $D(y)$ no tiene coordenada en b .

- b) Analicemos ahora las coordenadas de $D(y)$ en x y u : como $[u, y] = 0$, $[D(u), y] + [u, D(y)] = 0$ y, como ya vimos que la coordenada de a en $D(u)$ es 0, la coordenada en f de $[D(u), y]$ es 0, luego $[u, D(y)]$ no tiene coordenada en f , lo que implica que la coordenada de $D(y)$ en x es 0.

Nuevamente, el mismo argumento considerando $[x, y] = h$, nos permite concluir que la coordenada de $D(y)$ en u es 0.

- c) Consideremos ahora la coordenada en x de $D(u)$. Como $[u, y] = 0$, $[D(u), y] + [u, D(y)] = 0$. Si analizamos la coordenada h de este sumando, obtenemos

$$0 = \lambda_b(Du) + \lambda_x(Du) - \lambda_b(Dy).$$

Acabamos de ver que $\lambda_b(Dy) = 0 = \lambda_b(Du)$, luego $\lambda_x(Du) = 0$, como queríamos probar.

- d) Para terminar estos casos, sólo resta probar que las coordenada de $D(y)$ en u y en los e_i son nulas.

Como $[x, y] = h$, y recordando que $\lambda_u(Dx) = 0$ y $\lambda_{e_i}(Dx) = 0$, tenemos que

$$\begin{aligned} \lambda_h(Dh)h = D(h) &= [D(x), y] + [x, D(y)] \\ &= (\lambda_x(Dx)h - \sum \lambda_{e_i}(Dy)x_i + \lambda_u(Dy)f + \lambda_y(Dy)h), \end{aligned}$$

luego $\lambda_u(Dy) = 0$ y $\lambda_{e_i}(Dy) = 0$ para todo $1 \leq i \leq n$.

7. Dado $1 \leq i \leq n$, tenemos que

$$\begin{aligned} D(x_i) &= D([x, e_i]) = [D(x), e_i] + [x, D(e_i)] \\ &= -\lambda_x(Dx)x_i - \lambda_u(Dx)u_i - \lambda_y(Dy)y_i + \lambda_u(Dx)f + \lambda_y(Dx)h. \end{aligned}$$

Por otro lado, y como por 6. c) sabemos que $\lambda_x(Du) = 0$,

$$D(u_i) = D([u, e_i]) = [D(u), e_i] + [u, D(e_i)] = -\lambda_u(Du)u_i - \lambda_y(D(u))y_i - \lambda_x(De_i)f - \lambda_b(De_i)f.$$

Finalmente, y teniendo en cuenta que las coordenadas en x y u de $D(y)$ son 0 (6. b)),

$$D(y_i) = D([y, e_i]) = [D(y), e_i] + [y, D(e_i)] = -\lambda_y(Dy)y_i - \lambda_a(De_i)f - (\lambda_b(De_i) + \lambda_x(De_i))h.$$

Con esto concluimos los casos x_i , u_i e y_i .

De lo visto en 1-7, es claro que $D(w)$ es triangular inferior para todo $w \in \mathfrak{B}(B)$, lo que concluye la prueba de la proposición. □

Proposición 4.14. *Sea $D \in \text{Der}(\mathfrak{n})_1$. Entonces si para cada elemento $v \in \mathfrak{B}(B)$ denotamos λ_v al coeficiente de la diagonal de la matriz de D correspondiente al vector v , entonces se cumple:*

I) $\lambda_{e_i} = 0, \quad 1 \leq i \leq n.$

II) $\lambda_a = \lambda_b = \lambda_x.$

III) $\lambda_h = \lambda_f = 3\lambda_a.$

IV) $\lambda_y = \lambda_u = \lambda_c = 2\lambda_a.$

Demostración. La propiedad I) es obvio de la definición. Demostraremos a continuación las propiedades II), III) y IV). Teniendo en cuenta que por la proposición anterior D es una matriz triangular superior y observando la tabla de corchetes de \mathfrak{n} :

- Como $[x, u] = f \Rightarrow [D(x), u] + [x, D(u)] = D(f)$ y por lo tanto

$$\lambda_x + \lambda_u = \lambda_f. \quad (4.9)$$

Aplicando repetidamente este argumento, tenemos:

- $[a, y] = f \Rightarrow [D(a), y] + [a, D(y)] = D(f)$ y por lo tanto

$$\lambda_a + \lambda_y = \lambda_f. \quad (4.10)$$

- $[a, c] = h \Rightarrow [D(a), c] + [a, D(c)] = D(h)$ y por lo tanto,

$$\lambda_a + \lambda_c = \lambda_h. \quad (4.11)$$

- $[b, y] = h \Rightarrow [D(b), y] + [b, D(y)] = D(h)$. Además por 4.7 de la demostración anterior, la coordenada de $D(b)$ en la dirección de u es 0, y por lo tanto y por lo tanto,

$$\lambda_b + \lambda_y = \lambda_h. \quad (4.12)$$

- $[b, u] = h \Rightarrow [D(b), u] + [b, D(u)] = D(h)$. También por 4.7 de la demostración anterior, la coordenada de $D(b)$ en la dirección de y es 0, y por lo tanto

$$\lambda_b + \lambda_u = \lambda_h. \quad (4.13)$$

- $[x, y] = h \Rightarrow [D(x), y] + [x, D(y)] = D(h)$ y por lo tanto

$$\lambda_x + \lambda_y = \lambda_h. \quad (4.14)$$

- $[a, b] = c \Rightarrow [D(a), b] + [a, D(b)] = D(c)$ y por lo tanto

$$\lambda_a + \lambda_b = \lambda_c. \quad (4.15)$$

De (4.11) y (4.15) obtenemos

$$2\lambda_a + \lambda_b = \lambda_h. \quad (4.16)$$

Igualando con (4.13) nos queda

$$2\lambda_a = \lambda_u. \quad (4.17)$$

Reemplazando en la (4.9)

$$\lambda_x + 2\lambda_a = \lambda_f. \quad (4.18)$$

De (4.12) y (4.13) nos queda

$$\lambda_y = \lambda_u. \quad (4.19)$$

De (4.9) y (4.14) obtenemos

$$\lambda_h = \lambda_f. \quad (4.20)$$

De (4.10),(4.12) y (4.14)

$$\lambda_a = \lambda_b = \lambda_x, \quad (4.21)$$

quedando demostrada la propiedad II). De esta última y de (4.20) queda demostrada la propiedad III), esto es

$$\lambda_h = \lambda_f = 3\lambda_a.$$

De (4.11) y (4.12)

$$\lambda_y = \lambda_c. \quad (4.22)$$

Teniendo en cuenta esta última ecuación, la propiedad I) y la ecuación (4.19), queda demostrada la propiedad IV), esto es

$$\lambda_y = \lambda_u = \lambda_c = 2\lambda_a.$$

Quedando así demostrada la proposición. \square

Como consecuencia obtenemos el siguiente teorema sobre la estructura de $\text{Der}(\mathfrak{n})$.

Teorema 4.15. *Sea $\text{Der}(\mathfrak{n})$ el álgebra de Lie de derivaciones de \mathfrak{n} , y sean $\text{Der}(\mathfrak{n})_0$ y $\text{Der}(\mathfrak{n})_1$ las subálgebras de Lie definidas. Se verifican las siguientes propiedades:*

- (1) $\text{Der}(\mathfrak{n})_0$ es una subálgebra de Lie de $\text{Der}(\mathfrak{n})$ isomorfa a $\mathfrak{gl}(E)$.
- (2) $\text{Der}(\mathfrak{n})_1$ es un ideal soluble de $\text{Der}(\mathfrak{n})$.
- (3) $\text{Der}(\mathfrak{n}) = \text{Der}(\mathfrak{n})_0 \oplus \text{Der}(\mathfrak{n})_1$.

Demostración. La propiedad (1) ya fue discutida cuando definimos $\text{Der}(\mathfrak{n})_0$. La propiedad (2) es directa consecuencia del hecho de que la matriz de cualquier $D \in \text{Der}(\mathfrak{n})_1$ es triangular inferior.

Para probar (3), veamos primero que la suma es directa. Sea $D \in \text{Der}(\mathfrak{n})_0 \cap \text{Der}(\mathfrak{n})_1$. Entonces $D(E) \subset E$ y $D(E) \subset W$, y por lo tanto $D(E) = 0$. Como E y a, b, x, u, y generan \mathfrak{n} como álgebra de Lie, necesariamente es $D = 0$.

Veamos que $\text{Der}(\mathfrak{n})_0 \oplus \text{Der}(\mathfrak{n})_1 = \text{Der}(\mathfrak{n})$. Sea $D \in \text{Der}(\mathfrak{n})$.

Si A es la matriz correspondiente al bloque formado por las primeras n filas y columnas de la matriz de D en la base B , definimos $D_0 \in \text{Der}(\mathfrak{n})_0$, tal que $A = p_E \circ D|_E$ donde p_E es la proyección sobre E respecto a $\mathfrak{n} = E \oplus W$. Es claro que la matriz de D_0 en la base $\mathfrak{B}(B)$ resulta de la forma (4.4).

Sea ahora $D_1 = D - D_0$, que es también una derivación pues es diferencia de derivaciones. Claramente $D_1(E) \subset W$, por lo tanto $D_1 \in \text{Der}(\mathfrak{n})_1$. □

Estamos ahora en condiciones de probar el principal resultado de esta sección.

Teorema 4.16. *Sea $D \in \text{Der}(\mathfrak{n})$ diagonalizable con autovalores 1, 2 y 3, entonces las dimensiones de los autoespacios son respectivamente d_1, d_2 y d_3 .*

Demostración. Supongamos que $D = D_A + D_1$ con $D_A \in \text{Der}(\mathfrak{n})_0$ y $D_1 \in \text{Der}(\mathfrak{n})_1$. Luego la matriz de D en cualquier base $\mathfrak{B}(B)$ es de la forma

E	a	b	x	u	y	$\wedge^2 E$	c	X	U	Y	f	h
A	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*

y la matriz de D_A en cualquier base $\mathfrak{B}(B)$ es de la forma

E	a	b	x	u	y	$\wedge^2 E$	c	X	U	Y	f	h
A												
						$\wedge^2 A$						
							A		A			
										A		

Dado que D es diagonalizable, obtenemos que A es diagonalizable. Por lo tanto podemos elegir una base B de E tal que la matriz de D_A en la nueva base $\mathfrak{B}(B)$ es diagonal. Como la matriz de D_1 es triangular inferior en la base $\mathfrak{B}(B)$ resulta que matriz de D en la base $\mathfrak{B}(B)$ es triangular inferior.

Ahora para cada elemento $v \in \mathfrak{B}(B)$ denotamos con λ_v el coeficiente de la diagonal de la matriz de D correspondiente al vector v . Es claro que $\{\lambda_v : v \in \mathfrak{B}(B)\}$ son los autovalores de D contados con multiplicidad. La hipótesis dice que λ_v es 1, 2 o 3 para todo $v \in \mathfrak{B}(B)$. Esto, sumado al resultado de la Proposición 4.13 y a la forma que tiene la matriz de D_0 , nos dice que

- $\lambda_a = \lambda_b = \lambda_x = 1$.
- $\lambda_h = \lambda_f = 3$.
- $\lambda_y = \lambda_u = \lambda_c = 2$.

Finalmente, de la tabla de multiplicar de \mathfrak{n} tenemos que

- $\lambda_{u_i} = \lambda_{e_i} + \lambda_u$, y por lo tanto $\lambda_{e_i} = 1$ y $\lambda_{u_i} = 3$;
- $\lambda_{y_i} = \lambda_{e_i} + \lambda_y$, y por lo tanto $\lambda_{y_i} = 3$;
- $\lambda_{x_i} = \lambda_{e_i} + \lambda_x$, y por lo tanto $\lambda_{y_i} = 2$ y
- $\lambda_{e_i \wedge e_j} = \lambda_{e_i} + \lambda_{e_j} = 1 + 1 = 2$.

Contando ahora los autovalores, obtenemos que las multiplicidades de 1, 2 y 3 son respectivamente d_1, d_2 y d_3 . \square

4.4.3. Las álgebras de Lie $\mathfrak{n}(n)$ son de polinomio corto

Como corolario de los resultados de la subsección anterior obtenemos el siguiente teorema.

Teorema 4.17. *Toda graduación $\mathfrak{n} = \tilde{\mathfrak{n}}_1 \oplus \tilde{\mathfrak{n}}_2 \oplus \tilde{\mathfrak{n}}_3$ de \mathfrak{n} satisface $\dim \tilde{\mathfrak{n}}_i = \dim \mathfrak{n}_i = d_i$ para $i = 1, 2, 3$.*

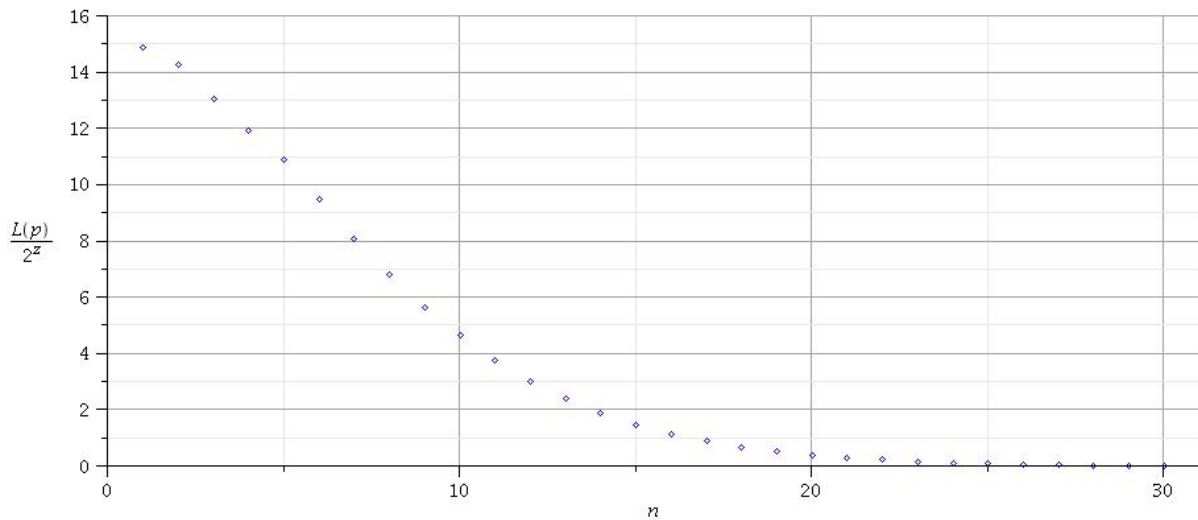
Demostración. Cada graduación de \mathfrak{n} define una derivación diagonalizable con autovalores 1, 2 y 3 tal que las respectivas multiplicidades son $\dim(\tilde{\mathfrak{n}}_1)$, $\dim(\tilde{\mathfrak{n}}_2)$ y $\dim(\tilde{\mathfrak{n}}_3)$. (ver Proposición 4.14). El Teorema 4.16 implica que estas multiplicidades son respectivamente d_1, d_2 y d_3 . \square

Como consecuencia de este teorema, los números d_1, d_2 y d_3 son independientes de la graduación de $\mathfrak{n}(n)$. Recordemos que para estas álgebras teníamos

$$d_1 = n + 3; \quad d_2 = 3 + \frac{n(n+1)}{2}; \quad d_3 = 2(n+1), \quad d_2^0 = 2; \quad d_2^1 = 1; \quad z_2 = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Recordemos además que $\dim \mathfrak{z} = 2^{z_2 + d_3}$.

A continuación graficamos el cociente $\frac{L(p)}{2^{z_2 + d_3}}$, del que es lógico conjeturar que este cociente es decreciente como función de n .



Más concretamente, para el caso particular $n = 17$ tenemos $\dim \mathfrak{n} = 212$ y

$$d_1 = 20; \quad d_2 = 156; \quad d_3 = 36, \quad d_2^0 = 2; \quad d_2^1 = 1; \quad z_2 = 153;$$

y hemos verificado computacionalmente que $\frac{L(p)}{2^{z_2+d_3}}$ es menor que 1, ya que

$$L(p) \approx 0,9 \times 2^{\dim \mathfrak{g}}.$$

Por lo tanto, hemos demostrado el siguiente:

Teorema 4.18. *Si $n = 17$ el álgebra de Lie $\mathfrak{n}(n)$ es de polinomio corto.*

Computacionalmente observamos que el cociente $\frac{L(p)}{2^{\dim \mathfrak{g}}}$ decrece a medida que n crece, en realidad vemos que tiende a cero. Esto es llegamos a la siguiente conjetura

Conjetura Si $n > 17$ el álgebra de Lie $\mathfrak{n}(n)$ es de polinomio corto.

Conclusiones y preguntas abiertas

Problema abordado en la Tesis

La CRT permanece abierta incluso para las álgebras de Lie 3-pasos nilpotentes graduadas, esto es $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_1 \oplus \mathfrak{n}_2 \oplus \mathfrak{n}_3$.

Un objetivo de esta tesis es encontrar dimensiones de álgebras de Lie tres pasos nilpotentes, hasta las cuales se puede asegurar que vale la CRT.

Vemos que para álgebras de Lie 3-pasos nilpotentes graduadas (en contraste de lo que sucede para las 2-pasos nilpotentes) la cota de la homología dada por la longitud del polinomio no alcanza para probar la CRT.

El trabajo consta de dos partes

1. Se estudian las dimensiones de las álgebras de Lie $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_1 \oplus \mathfrak{n}_2 \oplus \mathfrak{n}_3$ tales que

$$L(p) \geq 2^{\dim(\mathfrak{z}(\mathfrak{n}))},$$

y de este modo se encuentran álgebras de Lie 3-pasos nilpotentes y graduadas, para las que se puede asegurar que se cumple la CRT.

2. Se construyen álgebras de Lie $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_1 \oplus \mathfrak{n}_2 \oplus \mathfrak{n}_3$ tales que

$$L(p) < 2^{\dim(\mathfrak{z}(\mathfrak{n}))},$$

lo que nos dice que la cota de la dimensión de la homología por la longitud del polinomio no alcanza para probar la CRT en estas álgebras. Sin embargo queda abierta la pregunta si para estas álgebras vale o no la CRT.

Resultados obtenidos

Sea \mathfrak{n} un álgebra de Lie 3-pasos nilpotente de dimensión finita y sea \mathfrak{z} el centro de \mathfrak{n} . Diremos que \mathfrak{n} es de **polinomio largo** si admite una graduación $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_1 \oplus \mathfrak{n}_2 \oplus \mathfrak{n}_3$ tal que

$$L(p) \geq 2^{\dim(\mathfrak{z})},$$

donde $p = (1-x)^{d_1}(1-x^2)^{d_2}(1-x^3)^{d_3}$, con $d_i = \dim \mathfrak{n}_i$, es el polinomio asociado a la graduación. Diremos que \mathfrak{n} es de **polinomio corto** si no es de polinomio largo, es decir que si para toda graduación $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_1 \oplus \mathfrak{n}_2 \oplus \mathfrak{n}_3$ se cumple que $L(p) < 2^{\dim(\mathfrak{z})}$.

Observar que, por (1), toda álgebra de Lie de polinomio largo cumple la CRT y por lo tanto posibles contraejemplos a la CRT deben provenir de álgebras de Lie de polinomio corto.

Con estas definiciones, los principales objetivos de esta tesis son:

1. Encontrar cotas en la dimensión de \mathfrak{n} que aseguren que \mathfrak{n} es de polinomio largo.

2. Encontrar alguna \mathfrak{n} de polinomio corto. Lo ideal sería encontrar alguna familia de álgebras de Lie 3-pasos nilpotentes de polinomio corto para buscar dentro de ella algún contraejemplo a la CRT.

Los resultados obtenidos son

1. En relación al objetivo (1):
 - . Demostramos en el Teorema 4.7 que si \mathfrak{n} es 3-pasos nilpotente graduada e indescomponible tal que $\dim(\mathfrak{n}) \leq 22$ entonces \mathfrak{n} es de polinomio largo. De este resultado se deduce que la CRT se cumple para toda álgebra de Lie 3-pasos nilpotente graduada (no necesariamente indescomponible) de dimensión menor o igual que 22.
 - . Además, verificamos computacionalmente que si $\dim(\mathfrak{n}) < 99$ entonces \mathfrak{n} es de polinomio largo (ver grafico en la Sección 4.3.1) y por lo tanto la CRT es verdadera para toda álgebra de Lie 3-pasos nilpotente graduada de dimensión menor que 100.
2. En relación al objetivo (2) construimos para cada natural n un álgebra de Lie 3-pasos nilpotente y graduada $\mathfrak{n}(n)$ tal que
 - . $\dim(\mathfrak{n}(n)) = 5 + \frac{(n+1)(n+6)}{2}$; $\dim(\mathfrak{z}) = \frac{(n+1)(n+4)}{2}$.
 - . Toda graduación $\mathfrak{n}_1 \oplus \mathfrak{n}_2 \oplus \mathfrak{n}_3$ de $\mathfrak{n}(n)$ satisface (ver Teorema 4.17)

$$\dim(\mathfrak{n}_1) = n + 3, \quad \dim(\mathfrak{n}_2) = 3 + \frac{n(n+1)}{2}, \quad \dim(\mathfrak{n}_3) = 2(n+1);$$

- . Para $n \geq 17$ $\mathfrak{n}(n)$ es de polinomio corto (ver Teorema 4.18) y para $n = 17$ resulta que

$$L(p) \approx 0,9 \times 2^{\dim \mathfrak{z}}.$$

En este caso $\dim(\mathfrak{n}(n)) = 212$ y $\dim \mathfrak{z} = 189$.

- . Computacionalmente observamos que el cociente $\frac{L(p)}{2^{\dim \mathfrak{z}}}$ decrece a medida que n crece, en realidad vemos que tiende a cero. Creemos que para todo $n \geq 17$, el álgebra de Lie $\mathfrak{n}(n)$ es de polinomio corto.

Preguntas abiertas

En esta tesis se hace un aporte para determinar si la CRT es verdadera y en particular si se cumple para toda álgebra de Lie 3-pasos nilpotente y graduada. Nuestro interés a futuro es investigar si la CRT se cumple para la familia construida en esta tesis. Nosotros nos inclinamos a pensar que la CRT es verdadera y confiamos que el estudio de la homología de esta familia nos ayude a encontrar nuevas herramientas que ayuden a encontrar una prueba de la CRT (o un contraejemplo) al menos para las álgebras de Lie 3-pasos nilpotentes graduadas.

Bibliografía

- [Ar] Armstrong G., *Unimodal Betti numbers for a class of nilpotent Lie algebras*, Communications in Algebra, Vol. **25**, (1997), 1893-1915.
- [ACJ] Armstrong G., Cairns G. and Jessup B., *Explicit Betti numbers for a family of nilpotent algebras*, Proc. AMS, Vol. **125**, (1997), 381-385.
- [AS] Armstrong G. and Sigg S., *On de cohomology of a class of nilpotent Lie algebra*, Bull. Australian Math. Soc., Vol. **54**, (1996), 517-527.
- [Bo] Bot R., *Homogeneous vector bundle*, Ann. of Math., Vol. **66**, (1957), 203-248.
- [CT1] Cagliero L., Tirao P., *The adjoint homology of free 2-step nilpotent Lie algebra*, Quaterly Journal of Mathematics., Vol. **53**, N° 2, (2002), 125-145.
- [CT2] Cagliero L., Tirao P., *The chomology of the cotangent bundle of Heisemberg groups*, Advances in Mathematics, Vol. **181**, N— 2 (2004), 276-307.
- [CT3] Cagliero L., Tirao P., *On the adjoint homology of 2-step nilpotent Lie algebras*, Bull. Austral. Math. Soc., Vol. **71**, (2005), 177-182.
- [CK] Cairm, G. and Kim G., *Lie algebras of least cohomology*, Vol. **10**, N°2, (2000), 435-431.
- [DDMST] Patrick Dorey, Clare Dunning, Davide Masoero, Junji Suzuki, Roberto Tateo, *Pseudo-differential equations, and the Bethe ansatz for the classical Lie algebras* Original Research Article Nuclear Physics B, Volume 772, Issue 3, 18 June 2007, Pages 249-289.
- [DS] Deninger Ch. and Singhof W., *On de cohomology of nilpotent Lie algebras*, Bul. Soc. Math France, Vol. **116**, (1988), 3-14.
- [Di] Dixmier J., *Cohomologie des algibres de Lie nilpotentes*, Acta Sc. Math Szeged, Vol. **16**, (1955), 246-250.
- [GKT] Grassberger J., King A. and Tirao P., *On the homology of free 2-step nilpotent Lie algebras*, Journal of Algebra, Vol. **254** N—2 (2002), 213-225.
- [Ha] Hanlom P., *Some conjetures and results concerning the homology of nilpotent algebras*, Adv.in Math., Vol. **84**, (1990) 91-134.
- [Hal] Halperin S., *Rational homotopy and torus actions*, Aspects of Topology in London Math, Soc. Lecture Note Ser. Vol. **93** (1985), 293-305.
- [Haz] Hazewinkel M., *A duality theorem for the cohomology of Lie algebras*, Math. USSR Sbornik, Vol. **124**, (1970), 638-644.
- [HS] Hochschild G. and Serre J., *Cohomology the algebras*, Ann. of Math, Vol. **57**, (1953), 591-603.

- [HW1] Hanlon P. and Wachs, *On Property M conjecture for the cohomology of Lie algebras*, Adv. of Math., Vol. **84**, (1990), 91-134.
- [HW2] Hanlon P. and Wachs, *On Property M conjecture for the Heisenberg Lie algebras*, J. of Comb. Theory A., Vol. **99**, (2002), 219-231.
- [Ko1] Kostant B., *Lie algebra cohomology and the generalized Borel-Weil theorem*, Ann. of Math, Vol. **74**, (1961) , 329-387.
- [Ko2] Kostant B., *Lie algebra cohomology and the generalized Schubert cells*, Ann. of Math, Vol. **63**, (1963) , 72-144.
- [Ku] Kumar B., *Homology of certain truncated Lie algebras*, Contemp. Math, Vol. **248**, (1999) , 309-325.
- [No] Nomizu K., *On the cohomology of compact homogeneous space of nilpotent Lie groups*, Ann. of Math, Vol. **59**, (1954) , 531-538.
- [PA] Pohjanpelto J., Anderson I.M., *Infinite-dimensional Lie algebra cohomology and the cohomology of invariant Euler-Lagrange complexes*, Masaryk Univ., Brno, 1996, 427-448.
- [Pe] Ferreiro Pérez R., *Local cohomology and the variational bicomplex*, Int. J. Geom. Methods Mod. Phys. Vol. **5**, (2008), 587-604.
- [PT] Puseele H., Tirao P., *Constructing Lie algebra homology classes*, J. of Algebra, Vol. **292**, (2005) , 585-591.
- [Sa] Santharoubane L., *Cohomology of Heisenberg Lie algebras*, Proc- AMS, Vol. **87**, (1983) , 23-28.
- [Si] Sigg S., *Laplacian and homology of free 2-step nilpotent Lie Algebras*, J. of Algebra, Vol. **185**, (1996) , 144-1611.
- [T1] Tirao P., *A refinement of Toral Rank Conjecture for 2-step nilpotent Lie algebras*, Proc. Amer. Math. Soc., **128**(2000), 2875-2878.
- [T2] Tirao P., *On the homology of graded Lie algebras*, Jour. of Pure and Applied Alg., **156**(2001), 357-366.
- [Ve] Vergne M., *Cohomology des algèbres de Lie nilpotentes*, Application à l'étude de la variété des algèbres de Lie nilpotentes, Bull. Soc. Math. France, **98**(1970), 81-116.
- [Za] Zharinov V., *On the cohomology of Heisenberg algebras*, Proc. of the Steklov Inst. of Math., **228**(2000), 52-66.