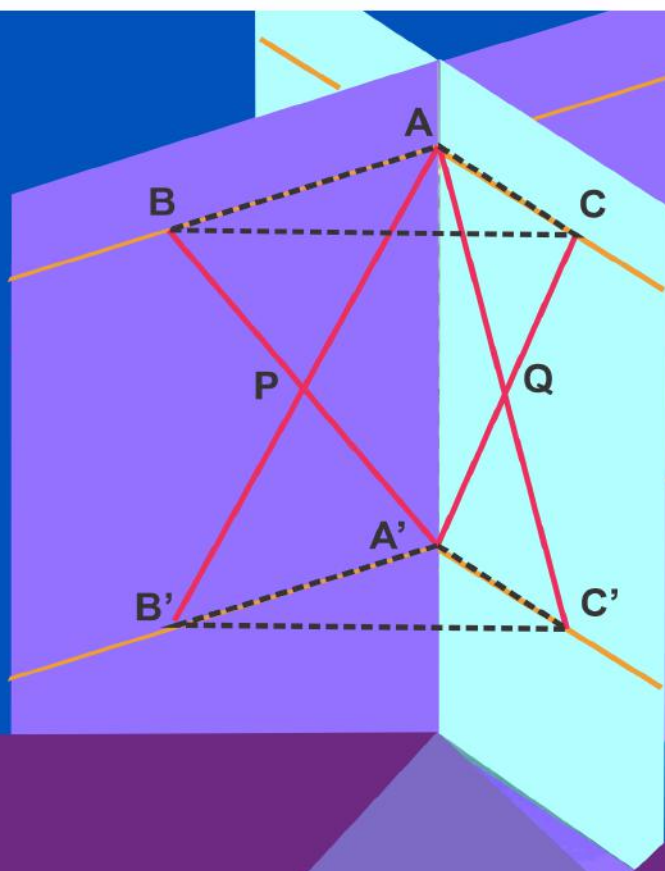


# GEOMETRÍA EUCLIDIANA

con Geogebra 



Antonio SÁNGARI  
Cristina EGÜEZ

 **UNSA** | Editorial  
Universitaria

Geometría Euclidiana  
con GeoGebra

Antonio Sangari, Cristina Eguez

Geometría Euclidiana con GeoGebra / Antonio Sangarí; Cristina Egüez – 1ra ed. - Salta:

Universidad Nacional de Salta, 2021

Libro digital, Otros

Archivo Digital: descarga y online

ISBN 978-987-633-565-2

CDD 516.2

**Fecha de catalogación:** 19/02/2021

**Título:** “Geometría Euclidiana con GeoGebra”

**Autores:** Antonio Sangarí y Cristina Egüez

**Universidad Nacional de Salta**

Avda. Bolivia 5150 – Salta Capital – CP 4400 – Arg.

Tel.: 0387- 4258707 – Fax: 0387- 4325745

E-mail: [seu@unsa.edu.ar](mailto:seu@unsa.edu.ar)

Web: [www.seu.unsa.edu.ar](http://www.seu.unsa.edu.ar)

**EUNSa: Editorial Universidad Nacional de Salta**

**Edición:** 1ra. Edición

**I.S.B.N. Nº:** 978-987-633-565-2

**Dirección:** Ing. David Laxi Wierna – Sec. de Extensión Universitaria / a cargo de editorial

**Registros:** Juan Carlos Palavecino

**Edición:** María Emilia Fernández

**Diseño:** Damián Veizaga

**Tirada:** 300 ejemplares

**Universidad Nacional de Salta**

Queda hecho el depósito que marca la ley 11.723

Impreso en Argentina – Printed in Argentina

Queda prohibida la reproducción total o parcial del texto de la presente obra en cualquiera de sus formas, electrónica o mecánica, sin el consentimiento previo y escrito del autor.

## **AUTORIDADES**

### **UNIVERSIDAD NACIONAL DE SALTA**

Cr. Víctor Hugo Claros  
**Rector**

Dra. Graciela del Valle Morales  
**Vicerrectora**

Ing. David Laxi Wierna  
**Secretario de Extensión Universitaria  
a/c de EUNSa**

### **FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS**

Ing. Gustavo Hoyos  
**Decano**

Mar. Gustavo Gil  
**Vicedecano**

## **EVALUADORES**

Dr. Oscar Bustos  
**Universidad Nacional de Córdoba**

Dr. Adrian Marcelo Andrada  
**Universidad Nacional de Córdoba**



A nuestras familias  
por su constante apoyo, afecto y alta cortesía para con nosotros.

# Prólogo

Es intención de los autores que este libro sirva ya sea para que los lectores aprendan *Geometría Euclidiana* en el sistema axiomático por ellos elegido o para que desarrollen y pongan a prueba sus habilidades deductivas. Su método consiste en presentar directamente algunas de las deducciones y dejar otras como ejercicios. Los autores no sólo han elegido los axiomas, sino también una sucesión finita de teoremas importantes.

Muchos textos de geometría presentan deducciones cuidadosamente elaboradas y dejan también otras como ejercicios. Este libro se destaca entre ellos por dos motivos que considero muy positivos: a) dan pruebas guiadas, muy cuidadosas, de los ejercicios, b) indican el uso de GeoGebra para realizar ilustraciones. Por si hay lectores que, como yo, no han usado todavía el GeoGebra aquí va un poco de historia.

Para plantear, estudiar o resolver situaciones geométricas, es usual realizar ilustraciones. Si sólo se hacen con papel y lápiz, la cantidad de ilustraciones realizadas para una misma situación, puede ser muy grande. Y habrá que volver a repetir cuidadosamente algunos de los dibujos para comunicar los resultados y posibilitar la revisión de los mismos por otros.

A comienzo de los 80, se empezó a trabajar en Francia en la producción de gráficos dinámicos usando ordenadores. En 1989 ya estaba disponible, en el mercado educativo francés, el Cabri-Géometre. Y rápidamente, se hizo conocido y usado en muchos otros países.

En 2002 apareció en Austria el programa GeoGebra que se usa en esta obra. Podemos decir que éste es una mejora, en varios aspectos, del Cabri-Géometre. Algunas de sus principales características están

---

descriptas en la introducción de este libro.

Conozco a los autores desde hace muchos años y valoro muy positivamente su dedicación y eficacia en el estudio de problemas geométricos. Personalmente, difiero en el tratamiento axiomático de las congruencias, pero estoy de acuerdo con ellos en que los métodos indicados en este libro pueden ser aplicados a otros sistemas axiomáticos.

Dolores Alia Aponte de Saravia

Profesora Emérita

Universidad Nacional de Salta

# Introducción

Este libro está pensado para docentes y estudiantes avanzados en Matemática interesados en destacar las habilidades que se derivan del estudio de la geometría y para todos los aficionados por el desarrollo del pensamiento lógico y la argumentación. El material que ofrecemos aquí es una concatenación de pruebas guiadas que permiten al lector avanzar en el fascinante camino de las deducciones lógicas.

Los prerequisites conceptuales que se requieren son pocos, pero debido a que tratamos con sistemas axiomáticos, contamos con los conocimientos que, en alguna medida, el lector tiene sobre los conceptos de deducción y demostración. En este sentido, tomamos como deducción, a partir de un conjunto de hipótesis o suposiciones, a un enunciado o a una sucesión de enunciados que pueden ser algunos de los axiomas que enunciamos más abajo, a las suposiciones que hagamos en el momento o enunciados surgidos por *modus ponens* a partir de pasos anteriores. Ejemplifiquemos esto último:

**Ejemplo 1.** Fijemos como el conjunto de axiomas:

1. Cualesquiera que sean los puntos  $A, B$ , existe una recta  $a$  que pasa por los puntos  $A, B$ .
2. Cualesquiera que sean dos puntos diferentes  $A, B$ , existe a lo sumo una recta que pasa por los puntos  $A, B$ .
3. En cada recta hay al menos dos puntos.

y sea el conjunto de suposiciones  $\Delta = \{\text{Existen dos puntos distintos } A \text{ y } B\}$ . Las siguientes serían deducciones a partir de este conjunto de suposiciones o hipótesis:

- 
1. Existen dos puntos distintos  $A$  y  $B$ . (Ésta, al ser un elemento del propio conjunto de suposiciones, es una deducción a partir de  $\Delta$ ).
  2. Cualesquiera que sean dos puntos diferentes  $A, B$ , existe a lo sumo una recta que pasa por los puntos  $A, B$ . (Ésta, al ser un axioma, es una deducción a partir de  $\Delta$ ).
  3. Existe una recta. (Este enunciado no es ni una suposición ni un axioma pero puede mostrarse que es una deducción a partir de  $\Delta$ ). Por ejemplo:
    - a) Existen dos puntos distintos  $A$  y  $B$  (Suposición).
    - b) Cualesquiera que sean los puntos  $A, B$ , existe una recta  $a$  que pasa por los puntos  $A, B$ . (Axioma).
    - c) Existe una recta  $a$ . (Inferencia lógica).

Cuando el conjunto de las hipótesis es vacío a la deducción la llamamos *demostración* y al último paso, *teorema*. También, todos los pasos de una demostración son teoremas, incluso todo axioma es un teorema, cuya demostración puede constar de un único paso. Usaremos como sinónimos de demostración las palabras prueba, justificación, etc.

En la práctica real, seguiremos llamando *deducción* o *demostración* a sucesiones que contengan, además, teoremas del cálculo de proposiciones o silogismos. Para más detalles ver [Margaris, 1990].

**Ejemplo 2.** Supongamos que deseamos demostrar que *por dos puntos  $A$  y  $B$  diferentes pasa una única recta*, es decir, deseamos encontrar una sucesión de pasos cuyo último paso sea *por dos puntos  $A$  y  $B$  (diferentes) pasa una única recta*. Una demostración puede ser:

1. Cualesquiera que sean los puntos  $A, B$ , (no necesariamente distintos) existe una recta  $a$  que pasa por los puntos  $A, B$ .
2. Cualesquiera que sean dos puntos diferentes  $A, B$ , existe a lo sumo una recta que pasa por los puntos  $A, B$ .

- 
3. Cualesquiera que sean los puntos  $A, B$ , existe una recta  $a$  que pasa por ellos y cualesquiera que sean dos puntos diferentes  $A, B$ , existe a lo sumo una recta que pasa por los puntos  $A, B$ .

El último ítem es, por supuesto, a lo que queríamos llegar. Note que usamos un silogismo llamado *conjunción*.

Sin responder totalmente a la formalidad que exige la lógica, aceptaremos que en una deducción aparezcan directamente teoremas de la teoría que estamos tratando que es la teoría de la Geometría Euclidiana o de otras.

Para el ordenamiento de los conceptos de este texto usamos principalmente el libro [Efimov, 1984]. En el capítulo referido a la continuidad hay secciones como el de la circunferencia o de las construcciones con regla y compás, donde se prefiere la exposición de [Ivorra, 2016]. El tratamiento de la geometría en nuestro ámbito académico es ligeramente distinto al que estamos exponiendo en este texto. Sin embargo, nuestra intención es dejar de manifiesto que ambos tienen muchos puntos de contacto. Como referencia del otro procedimiento tenemos el libro de [Alia Aponte de Saravia, 2007].

Una de las características de este libro es que la gran mayoría de los ejercicios guiados es asistido con GeoGebra, pues consideramos que este software:

- Es libre y gratuito.
- Es muy conocido en el medio educativo local.
- Está diseñado para apoyar la enseñanza de la Matemática en varias ramas, como por ejemplo, Geometría, Álgebra, Cálculo, y Estadística.
- Permite crear gráficos dinámicos, es decir, que pueden modificarse de acuerdo a la variación de las condiciones iniciales de la construcción.
- Es fácil exportar las hojas de GeoGebra para ponerlas a disposición de la comunidad educativa de Matemática o de otras disciplinas afines.

---

Para más detalles puede visitarse la página en español  
<https://www.geogebra.org/?lang=es>.

Por último, destacamos que de manera singular se desarrollan teoremas importantes de la Geometría Euclidiana a través de ejercicios guiados, separados en pasos deductivos acompañados de un dibujo, lo que genera un trabajo dinámico y, en nuestra opinión, lleva a un mejor entendimiento de los conceptos que abordamos y a fortalecer el pensamiento abstracto.

# Agradecimientos

A los estudiantes y docentes que participaron en los distintos cursos y talleres que dictamos sobre Geometría Euclidiana. Sus respuestas y planteos nos ayudaron a mejorar paso a paso el desarrollo de este material.

Entre tantos que han ayudado en la revisión, haciendo sugerencias y correcciones oportunas, destacamos los relevantes aportes de Beatriz Josefina Solís Munguía, Celia Villagra, Emanuel Osedo, Javier Azar, Juan Pablo Dioli, Luca D'Amico, Lucía de los Ángeles Reales Verón, Marcela Chorolque, Pamela Tapia, Sebastián Polo, Silvana Puca, Silvina Ponce, no sólo por la calidad de su cooperación, sino también por el genuino apoyo para la concreción de este libro.

A Dios fuente de toda sabiduría.



# Índice general

<b>1. Incidencia</b>	<b>1</b>
1.1. Axiomas de incidencia . . . . .	1
1.2. Consecuencias de los axiomas . . . . .	5
<b>2. Orden</b>	<b>11</b>
2.1. Axiomas de orden . . . . .	11
2.2. Consecuencias de incidencia y de orden . . . . .	12
2.3. Orden de los puntos de una semirrecta . . . . .	28
2.4. Orden de los puntos de una recta . . . . .	31
2.4.1. Orden de los puntos interiores de un segmento . . . . .	42
2.5. Separación en el plano . . . . .	43
2.6. Orden de semirrectas . . . . .	67
2.6.1. Orden de semirrectas interiores de un ángulo . . . . .	67
2.6.2. Orden en un haz de semirrectas . . . . .	68
<b>3. Congruencia</b>	<b>71</b>
3.1. Axiomas de congruencia . . . . .	71
3.2. Congruencia, orden e incidencia . . . . .	73
3.3. Congruencia de triángulos . . . . .	76
3.4. Aplicaciones congruencia de triángulos . . . . .	89
3.4.1. El punto medio de un segmento . . . . .	94
3.4.2. Bisectriz de un ángulo . . . . .	96
3.4.3. Perpendicularidad en el plano . . . . .	98
3.5. Orden entre segmentos y ángulos . . . . .	100
3.5.1. Relaciones de orden entre segmentos . . . . .	100

*ÍNDICE GENERAL*

---

3.5.2.	Relaciones de orden entre ángulos . . . . .	103
3.5.3.	Lados y ángulos de triángulos . . . . .	106
3.6.	Perpendicularidad en el espacio . . . . .	114
3.6.1.	Planos y rectas perpendiculares . . . . .	114
3.6.2.	Planos perpendiculares . . . . .	121
3.7.	Isometría . . . . .	123
	Propiedades de las isometrías . . . . .	124
	Giros y traslaciones . . . . .	141
<b>4.</b>	<b>Continuidad</b> . . . . .	<b>143</b>
4.1.	Axiomas de continuidad . . . . .	143
	Longitud de segmentos . . . . .	144
	El proceso de medición . . . . .	146
4.1.1.	La circunferencia . . . . .	171
4.2.	Intersección de recta y circunferencia . . . . .	176
4.3.	Intersección de dos circunferencias . . . . .	179
4.4.	Construcciones con regla y compás . . . . .	186
	4.4.1. Construcciones con compás antiguo y moderno .	188
<b>5.</b>	<b>Paralelismo</b> . . . . .	<b>191</b>
5.1.	Axioma de las paralelas y consecuencias . . . . .	191
5.2.	Paralelas y una transversal . . . . .	193
5.3.	Proposiciones equivalentes . . . . .	196
	El quinto postulado de Euclides . . . . .	196
5.3.1.	La suma de los ángulos interiores de un triángulo	198
5.3.2.	Perpendiculares levantadas desde un lado de un ángulo agudo . . . . .	208
5.4.	Paralelismo en el espacio . . . . .	210

# Índice de figuras

1.1.1.Axioma 1 de incidencia . . . . .	2
1.1.2.Axioma 2 de incidencia . . . . .	2
1.1.3.Axioma 3 de incidencia . . . . .	2
1.1.4.Axioma 4 de incidencia . . . . .	3
1.1.5.Axioma 5 de incidencia . . . . .	3
1.1.6.Axioma 6 de incidencia . . . . .	4
1.1.7.Axioma 7 de incidencia . . . . .	4
1.1.8.Axioma 8 de incidencia . . . . .	4
1.2.1.Rectas alabeadas . . . . .	7
1.2.2.Cada plano contiene al menos 3 puntos no alineados y 3 rectas . . . . .	8
1.2.3.Modelo de los axiomas de incidencia . . . . .	10
2.2.1.Pasch simplificado . . . . .	13
2.2.2.Recta que pasa por puntos interiores de los segmentos $AB$ , $AC$ y $BC$ , con $A$ , $B$ y $C$ no alineados. . . . .	16
2.2.3.Segmentos solapados . . . . .	17
2.2.4.Segmentos encajados . . . . .	18
2.4.1.Orden de puntos en la recta . . . . .	32
2.5.1.Semirrectas encajadas . . . . .	58
2.5.2.Recta determinada por dos de cuatro puntos no alineados corta al segmento determinado por los otros dos. . . . .	59
2.6.1.Orden en un haz de semirrectas: $s < t$ . . . . .	69
3.3.1.Suma y resta de ángulos . . . . .	80
3.6.1.Recta perpendicular a un plano . . . . .	114

## ÍNDICE DE FIGURAS

---

3.6.2. Congruencia de secciones normales de un diedro . . . . .	123
3.7.1. Movimiento o isometría . . . . .	134
3.7.2. Simetría especular . . . . .	140
4.1.1. Axioma de Arquímedes . . . . .	144
4.1.2. Axioma de Cantor . . . . .	144
4.1.3. Proceso de Medición para $n = 2$ . . . . .	148
4.1.4. Coordenadas del punto $P$ . . . . .	163
4.1.5. Principio de Dedekind . . . . .	166
4.3.1. Relaciones entre circunferencias que se cortan . . . . .	180
4.3.2. Propiedades $\mathcal{P}$ y $\mathcal{P}'$ . . . . .	183
5.2.1. Ángulos formados por paralelas cortadas por una trans- versal . . . . .	194
5.3.1. Postulado V de Euclides . . . . .	196
5.3.2. La suma de los ángulos interiores y el axioma de las paralelas . . . . .	200
5.3.3. Cuadrilátero de Saccheri . . . . .	209
5.4.1. Paralelismo en el espacio . . . . .	211
5.4.2. Segmento perpendicular a rectas alabeadas . . . . .	213

# Índice de cuadros

2.1. Tricotomía de orden en la recta . . . . .	33
2.2. Transitividad de orden en la recta . . . . .	35



# Capítulo 1

## Incidencia

Tratamos con un predicado que relaciona puntos con rectas y con otro que relaciona puntos con planos. En ambos casos decimos que un punto *está en* o *pertenece a* una recta o un plano y es sinónimo de que la recta o el plano *pasa por* el punto. También usamos expresiones como: dos rectas *se cortan* para abreviar que existe un único punto que pasa por cada una de ellas. Usamos estos términos con bajo rigor en relación al lenguaje de la Lógica, pues por el momento no estamos interesados en estos detalles. También decimos que los puntos *están alineados* como sinónimo de que *están sobre una misma recta* o que son *colineales*; y que son *coplanares* para decir que *están sobre un mismo plano*.

### 1.1. Axiomas de incidencia

- I 1 Cualesquiera que sean los puntos  $A, B$ ,<sup>1</sup> existe una recta  $a$  que pasa por los puntos  $A, B$ .
  
- I 2 Cualesquiera que sean dos puntos diferentes  $A, B$ , existe a lo sumo una recta que pasa por los puntos  $A, B$ .

---

<sup>1</sup>No necesariamente distintos.

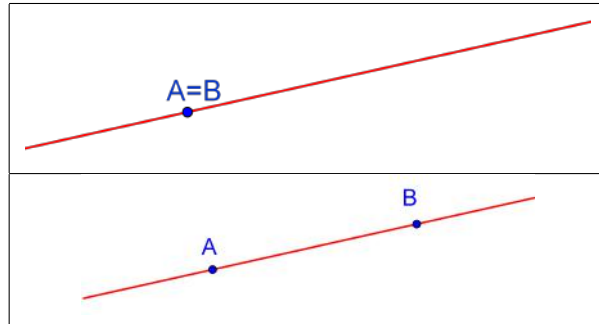


Figura 1.1.1: Axioma 1 de incidencia

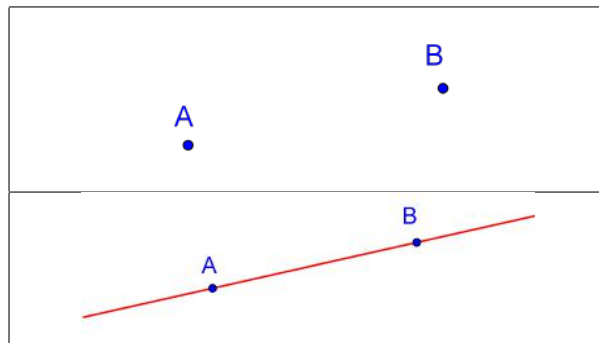


Figura 1.1.2: Axioma 2 de incidencia

I 3 En cada recta hay al menos dos puntos. Existen al menos tres puntos que no pertenecen a una misma recta.

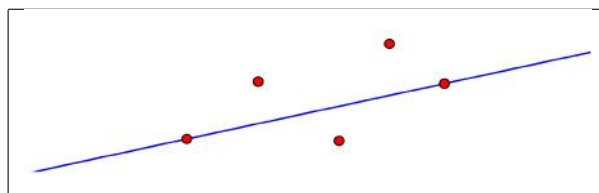


Figura 1.1.3: Axioma 3 de incidencia

I 4 Cualquiera que sean los puntos  $A, B, C$ , que no pertenecen a

## 1.1. AXIOMAS DE INCIDENCIA

---

una misma recta, existe un plano que pasa por cada uno de los puntos  $A, B, C$ . En cada plano hay al menos un punto.

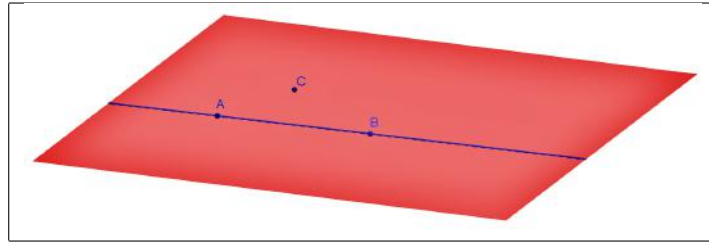


Figura 1.1.4: Axioma 4 de incidencia

I 5 Cualquiera que sean tres puntos  $A, B, C$  que no pertenecen a una misma recta, existe a lo sumo un plano que pasa por cada uno de los tres puntos  $A, B, C$ .

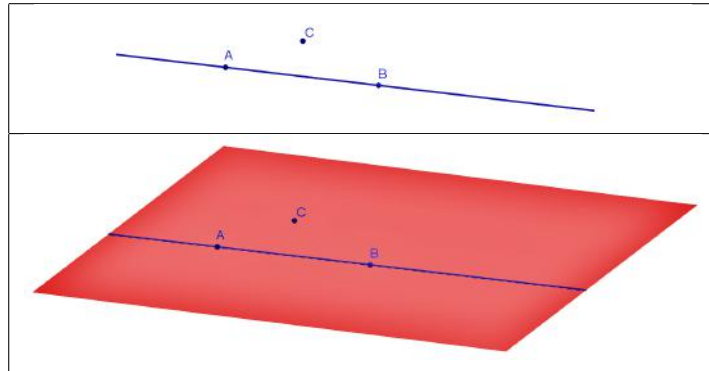


Figura 1.1.5: Axioma 5 de incidencia

- I 6 Si dos puntos  $A, B$  de la recta  $a$  pertenecen al plano  $\alpha$ , cada punto de la recta  $a$  pertenece al plano  $\alpha$ .
- I 7 Si dos planos  $\alpha, \beta$  tienen un punto común  $A$ , tienen al menos otro punto común  $B$ .
- I 8 Existen al menos cuatro puntos que no pertenecen a un mismo plano.

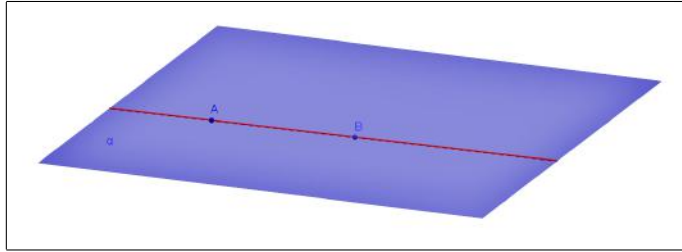


Figura 1.1.6: Axioma 6 de incidencia

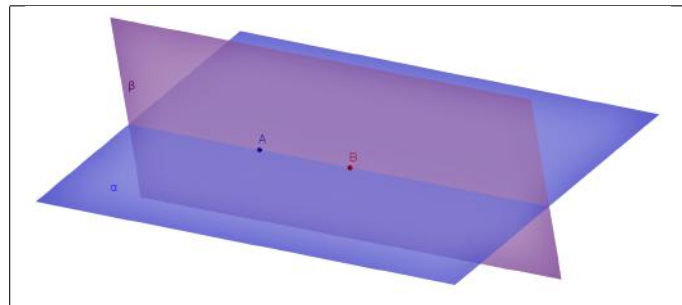


Figura 1.1.7: Axioma 7 de incidencia

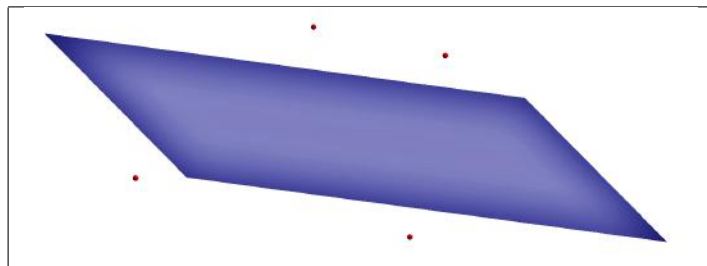


Figura 1.1.8: Axioma 8 de incidencia

*Observación 3.* Usando los primeros dos axiomas queda claro que por dos puntos  $A$  y  $B$  (diferentes)<sup>2</sup> pasa un única recta, la llamamos  $AB$ .

<sup>2</sup>Cuando usamos la expresión *dos puntos* nos referimos a que deben ser diferentes. Es decir, cuando indicamos la cantidad de elementos entendemos que son distintos. A veces, utilizamos la palabra “diferentes” para resaltar por redundancia.

## 1.2. Consecuencias de los axiomas de incidencia

**Ejercicio 4.** Pruebe que dos rectas diferentes tienen a lo sumo un punto en común (sugerencia: suponga que las rectas  $r$  y  $s$  tienen dos puntos diferentes en común).

**Ejercicio 5.** Pruebe que todo punto está sobre una recta (sugerencia: revise el axioma I 1).

**Teorema 6.** *Toda recta está sobre un plano.*

**Ejercicio 7.** Pruebe el teorema 6 siguiendo los pasos a continuación.

1. Abra una hoja de GeoGebra. Elija vista 3D. Oculte el plano  $xy$  y los ejes cartesianos.
2. Pruebe que sobre una recta  $a$  cualquiera existen al menos dos puntos  $A$  y  $B$ . Dibújelos.
3. Pruebe que hay un punto  $C$  que no está sobre  $a$ . Dibuje a  $C$ .
4. Pruebe que  $A$ ,  $B$  y  $C$  no están sobre una misma recta.
5. Pruebe que  $A$ ,  $B$  y  $C$  están sobre un plano  $\alpha$ . Dibuje a  $\alpha$ .
6. Pruebe que  $a$  pasa por  $\alpha$ .
7. Concluya la prueba.

**Ejercicio 8.** Pruebe que todo punto está sobre un plano (sugerencia: use el axioma I 1 y el teorema 6).

**Teorema 9.** *Si dos planos tienen un punto en común, entonces tienen una única recta en común.*

**Ejercicio 10.** Pruebe el teorema 9 siguiendo los pasos a continuación.

1. Abra una hoja de GeoGebra. Elija vista 3D. Oculte el plano  $xy$  y los ejes cartesianos.

2. Dibuje cinco puntos  $A, B, C, D$  y  $E$  no alineados de a tres.
3. Trace el plano  $\alpha = ABC$  (que pasa por  $A, B$  y  $C$ ).
4. Arrastre los puntos  $D$  y  $E$  fuera de  $\alpha$ . (Haga click sobre los puntos hasta que se seleccione la flecha para movimiento horizontal o vertical).
5. Trace el plano  $\beta = ADE$ .
6. Pruebe que hay otro punto  $F$  distinto de  $A$  en el corte de los planos  $\alpha$  y  $\beta$ .
7. Pruebe que existe una única recta  $c$  que pasa por  $A$  y  $F$ . Dibuje a  $c$  como intersección de superficies y a  $F$  sobre  $c$ .
8. Pruebe que la recta  $c$  pasa tanto por  $\alpha$  como por  $\beta$ .
9. Concluya la prueba.

**Ejercicio 11.** Pruebe que un plano y una recta que no le pertenece tienen a lo sumo un punto en común.

**Teorema 12.** *Por una recta y un punto que no le pertenece o por dos rectas con un único punto en común, pasa un único plano, que contiene a estas rectas y estos puntos.*

**Ejercicio 13.** Pruebe el teorema 12 (sugerencia: muestre en los dos casos que existen tres puntos no alineados y luego use los axiomas I 4, I 5 y I 6).

**Definición 14.** Dos rectas son *secantes* si se cortan en un único punto. Dos rectas son *alabeadas* si no existe un plano que las contenga.

**Proposición 15.** *Si  $A, B$  y  $C$  no están alineados entonces son tres puntos distintos. Si  $A, B, C$  y  $D$  no son coplanares, entonces son cuatro puntos distintos, además no hay tres de ellos alineados.*

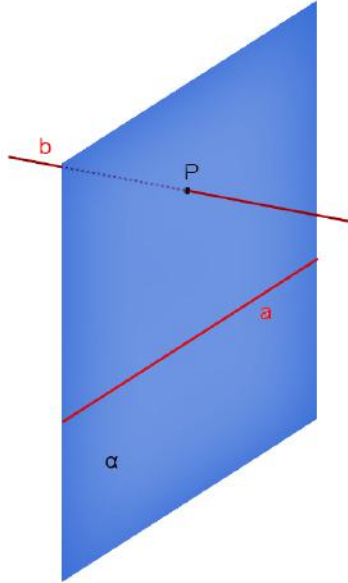


Figura 1.2.1: Rectas alabeadas

**Ejercicio 16.** Pruebe la proposición 15 (sugerencia: considere los axiomas I 1, I 2, I 4 y I 5).

**Teorema 17.** *Cada plano contiene al menos tres puntos no alineados y tres rectas.*

**Ejercicio 18.** Pruebe el teorema 17 siguiendo los pasos a continuación.

1. Abra una hoja de GeoGebra. Elija vista 3D. Oculte el plano  $xy$  y los ejes cartesianos.
2. Dibuje un plano  $\alpha = ABC$ .
3. Oculte  $A$ ,  $B$  y  $C$ .
4. Pruebe que existe un punto  $D$  sobre  $\alpha$ . Dibuje a  $D$ .
5. Pruebe que existe un punto  $E$  fuera de  $\alpha$ . Dibuje a  $E$  sobre  $\alpha$ , libérela y arrástrela fuera de  $\alpha$ .

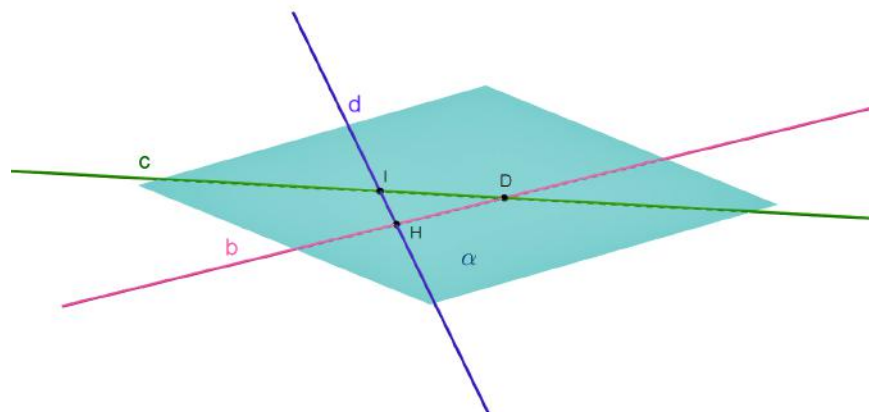


Figura 1.2.2: Cada plano contiene al menos 3 puntos no alineados y 3 rectas

6. Pruebe que existe una única recta  $a = DE$ . Dibuje a  $a$ .
7. Pruebe que existe un punto  $F$  que no pertenece a  $a$ . Dibuje a  $F$  sobre  $a$ , libérela y arrástrela fuera de  $a$ .
8. Pruebe que por  $D$ ,  $E$  y  $F$  pasa un único plano  $\beta \neq \alpha$ . Dibuje a  $\beta$ .
9. Pruebe que existe un punto  $G$  que no está en  $\beta$ . Dibuje a  $G$ .
10. Pruebe que existe un único plano  $\gamma \neq \alpha \neq \beta$  que pasa por  $G$ ,  $D$  y  $E$ . Dibuje a  $\gamma$ .
11. Use el teorema 9 para mostrar que existen las rectas  $b$ , de corte de  $\alpha$  y  $\beta$ ; y  $c$  de corte de  $\alpha$  y  $\gamma$ . Dibújelas con la herramienta Intersección de dos superficies.
12. Pruebe que  $b \neq c$  (sugerencia: use la reducción al absurdo).
13. Muestre que existen puntos  $H \neq D$  y  $I \neq D$ , que pertenecen a las rectas  $b$  y  $c$  respectivamente. Dibújelos. Justifique que  $H \neq I$ .

## 1.2. CONSECUENCIAS DE LOS AXIOMAS

---

14. Pruebe que existe la recta  $d \neq b \neq c$  que está en  $\alpha$  y pasa por  $H$  e  $I$ . Dibuje a  $d$ .
15. Concluya con la prueba.

**Teorema 19.** (*Criterio de rectas albeadas*) Sean las rectas  $a$  y  $b$  tales que existe un plano  $\alpha$  que contiene a  $a$  y solamente a un punto  $P$  de  $b$  que no está en  $a$ . Entonces las rectas  $a$  y  $b$  son albeadas (figura 1.2.1).

**Ejercicio 20.** Pruebe el teorema 19 siguiendo los pasos a continuación.

1. Abra una hoja de GeoGebra en la vista 3D y oculte los ejes y el plano  $xy$ .
2. Dibuje dos rectas  $a$  y  $b = PQ$ , tal que  $P$  no esté en  $a$ .
3. Dibuje el plano  $\alpha$  determinado por  $a$  y  $P$ .
4. Arrastre el punto  $Q$  fuera de  $\alpha$ .
5. Suponga por el absurdo que existe un plano  $\beta$  que contiene a las rectas  $a$  y  $b$ . Concluya la contradicción con el teorema 12.
6. Concluya la prueba.

**Teorema 21.** *Existen al menos cuatro puntos, seis rectas y cuatro planos. Hay rectas albeadas.*

**Ejercicio 22.** Pruebe el teorema 21 siguiendo los pasos a continuación.

1. Use la proposición 15 para mostrar que existen los puntos  $A, B, C$  y  $D$  no coplanares y distintos tales que no hay tres de ellos alineados. Dibújelos.
2. Pruebe que existen las rectas  $r = AB, s = AC, t = AD, u = BC, v = BD$ , y  $w = CD$  y éstas son distintas dos a dos. Dibuje estas rectas.

3. Pruebe que hay al menos cuatro planos.
4. Muestre que las rectas  $r$  y  $w$  están alabeadas (sugerencia: use el criterio de rectas alabeadas).
5. Concluya la prueba.

*Observación 23.* El esquema del teorema 21 resiste la verificación de todos axiomas de incidencia. Intuitivamente, si a una pirámide le llamáramos espacio, a sus vértices puntos, a sus aristas rectas y a sus caras planos, la pirámide cumpliría plenamente con los axiomas. Por lo tanto con sólo los axiomas de incidencia es claro que **no** podemos demostrar, por ejemplo, que hayan más de cuatro puntos ni que hayan rectas coplanares que no se cortan.

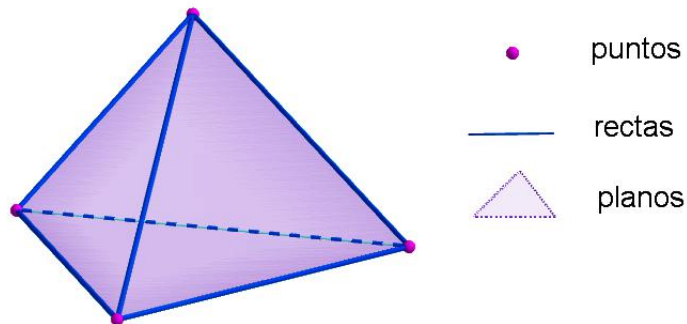


Figura 1.2.3: Modelo de los axiomas de incidencia

# Capítulo 2

## Orden

Trataremos con un predicado que relaciona puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$ . Decimos que *un punto  $B$  está entre  $A$  y  $C$*  para referirnos a este predicado.

**Definición 24.** A un par no ordenado de puntos  $A$  y  $B$  lo llamamos *segmento  $AB$* .

- A los puntos que están entre  $A$  y  $B$  los llamamos *puntos interiores* de  $AB$ .
- A los puntos  $A$  y  $B$  los llamamos *extremos* del segmento  $AB$ .
- A la recta  $AB$  la llamamos *prolongación* del segmento  $AB$ .

### 2.1. Axiomas de orden

- II 1 Si el punto  $B$  se encuentra entre el punto  $A$  y el punto  $C$ , entonces  $A$ ,  $B$  y  $C$  son puntos diferentes de una misma recta, y  $B$  se encuentra, asimismo, entre  $C$  y  $A$ .
- II 2 Cualesquiera que sean los puntos distintos  $A$  y  $C$ , existe al menos un punto  $B$  sobre la recta  $AC$  tal que  $C$  está entre  $A$  y  $B$ .

- II 3 Entre tres puntos cualesquiera de una recta, a lo sumo uno de ellos puede encontrarse entre los otros dos.
- II 4 (Axioma de Pasch) Sean  $A, B, C$  tres puntos que no pertenecen a una misma recta, y  $a$ , una recta en el plano  $ABC$  que no contiene ninguno de los puntos  $A, B, C$ . Entonces, si la recta  $a$  pasa por algún punto del segmento  $AB$ , también pasará por algún punto del segmento  $AC$  o por alguno del segmento  $BC$ .

## 2.2. Consecuencias de los axiomas de incidencia y de orden

**Proposición 25.** *Si dos puntos  $A$  y  $B$  están sobre una recta  $r$  o sobre un plano  $\alpha$ , los puntos interiores del segmento  $AB$  están en  $r$  o en  $\alpha$ , respectivamente.*

**Ejercicio 26.** Pruebe el corolario 25 (sugerencia: use el axioma II 1 y el axioma I 6).

**Teorema 27. (*Pasch simplificado*)** Sean  $A, B$  y  $C$  puntos no alineados y  $D$  un punto tal que  $B$  está entre  $C$  y  $D$ , entonces  $A, B, C$  y  $D$  son distintos de a dos y si una recta  $r$ , que pasa por  $D$ , corta al segmento  $AB$ , entonces cortará también al segmento  $AC$ . También, si  $r$  corta al segmento  $AC$  cortará al segmento  $AB$ .

**Ejercicio 28.** Pruebe el teorema 27 siguiendo los pasos a continuación.

1. Dibuje tres puntos  $A, B$  y  $C$  no alineados y la recta  $a = BC$ .
2. Marque un punto  $D$  tal que  $B$  esté entre  $C$  y  $D$ .
3. Muestre que  $A, B, C$  y  $D$  son distintos de a dos (sugerencia: use la proposición 15 y el axioma II 1).
4. Dibuje la recta  $b = AC$  y un punto  $E$  entre  $A$  y  $C$ .

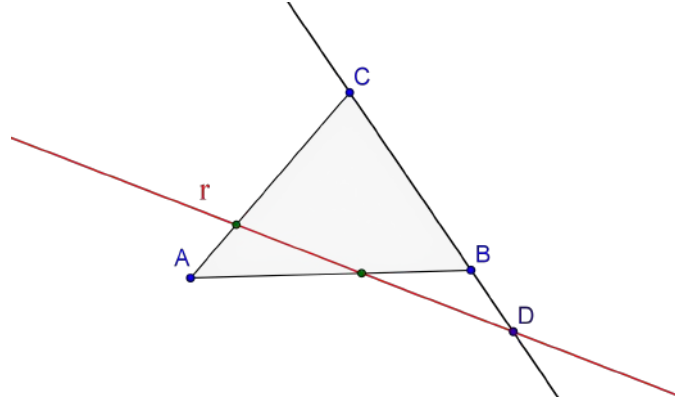


Figura 2.2.1: Pasch simplificado

5. Demuestre que  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  y  $E$  son distintos de a dos.
6. Trace la recta  $r = DE$ .
7. Muestre que  $r$  está en el plano que determinan  $A$ ,  $B$  y  $C$ .
8. Muestre que  $r$  no pasa por ninguno de los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$  (sugerencia: suponga lo contrario y llegue a un absurdo).
9. Muestre que  $r$  no tiene puntos comunes con el segmento  $BC$  (sugerencia: muestre que ni  $D$  ni ningún otro punto de  $r$  está en  $BC$ . Suponga lo contrario y llegue a un absurdo).
10. Aplique el axioma de Pasch a los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$  y a la recta  $r$  para mostrar que existe un punto en el segmento  $AB$ .
11. Concluya la prueba.

**Teorema 29.** *Cualesquiera que sean dos puntos diferentes  $A$  y  $C$ , existen puntos interiores del segmento  $AC$ .*

**Ejercicio 30.** Pruebe el teorema 29 siguiendo los pasos a continuación.

1. Dibuje dos puntos  $A$  y  $C$  distintos y la recta  $a = AC$ .

2. Marque un punto  $E$  fuera de  $a$  (y por lo tanto distinto de  $A$  y  $C$ ).
3. Demuestre que existe un punto  $F$  tal que  $E$  está entre  $A$  y  $F$ . Marque el punto  $F$  y la recta  $b = AE$ .
4. Muestre que  $A$ ,  $F$  y  $C$  no están alineados.
5. Demuestre que existe un punto  $D$  tal que  $C$  está entre  $D$  y  $F$ . Marque el punto  $D$  y la recta  $b = FC$ .
6. Aplique el teorema 27 a los puntos  $C$ ,  $A$ ,  $F$  y  $D$ , para demostrar que debe existir un punto  $B$  entre  $A$  y  $C$ .
7. Concluya la prueba.

**Teorema 31.** *Dados tres puntos diferentes sobre una recta, hay siempre uno de ellos, y sólo uno, que está entre los otros dos.*

**Ejercicio 32.** Pruebe el teorema 31 siguiendo los pasos a continuación.

1. Dibuje la recta  $a = AB$ .
2. Dibuje a  $C$  tal que  $B$  esté entre  $A$  y  $C$ .<sup>1</sup>
3. Suponga que  $A$  no está entre  $B$  y  $C$ , ni que  $C$  está entre  $A$  y  $B$  (tenemos que probar que necesariamente  $B$  está entre  $A$  y  $C$ ).
4. Dibuje un punto  $D$  que no esté en  $a$ .
5. Trace la recta  $b = BD$ .
6. Pruebe que existe un punto  $E$  tal que  $D$  esté entre  $B$  y  $E$ . Marque un punto  $E$ .
7. Trace la recta  $c = AE$ .

---

<sup>1</sup>Este paso es meramente ilustrativo y no forma parte de la demostración.

## 2.2. CONSECUENCIAS DE INCIDENCIA Y DE ORDEN

---

8. Trace la recta  $d = CD$ .
9. Pruebe que las rectas  $a, b, c$  y  $d$  son distintas de a dos y que los puntos  $A, E$  y  $B$  no están alineados.
10. Aplique el axioma de Pasch a la recta  $d$  y a los puntos  $A, E$  y  $B$  para mostrar que existe un punto  $F$  entre  $A$  y  $E$ . Tenga en cuenta que  $C$  no está entre  $A$  y  $B$ . Marque a  $F$ .
11. Trace la recta  $e = EC$ .
12. Trace la recta  $f = AD$ .
13. Pruebe que las rectas  $a, b, e$  y  $f$  son distintas de a dos y que los puntos  $B, E$  y  $C$  no están alineados.
14. Aplique el axioma de Pasch a la recta  $f$  y a los puntos  $B, E$  y  $C$  para mostrar que existe un punto  $G$  entre  $C$  y  $E$ . Tenga en cuenta que  $A$  no está entre  $B$  y  $C$ . Marque a  $G$ .
15. Aplique el teorema 27 a los puntos  $A, E, G$  y  $C$  para mostrar que el punto  $D$  está entre  $A$  y  $G$ .
16. Aplique el teorema 27 a los puntos  $A, G, C$  y  $E$  para mostrar que el punto  $B$  está entre  $A$  y  $C$ .
17. Concluya con la prueba.

**Teorema 33.** *Si los puntos  $A, B, C$  no están sobre una misma recta y si alguna recta  $a$  interseca dos cualquiera de los tres segmentos  $AB, BC, AC$ , entonces ésta no corta al tercer segmento.*

**Ejercicio 34.** Pruebe el teorema 33 siguiendo los pasos a continuación.

1. Suponga, para reducir el problema al absurdo, que la recta  $PQR$  corta a los segmentos  $AB, BC$  y  $AC$  en los puntos  $P, Q$  y  $R$  respectivamente.

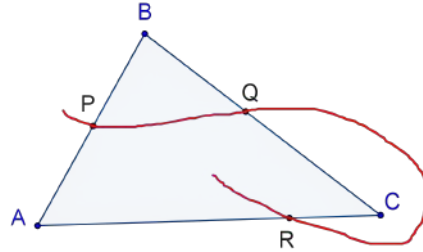


Figura 2.2.2: Recta que pasa por puntos interiores de los segmentos  $AB$ ,  $AC$  y  $BC$ , con  $A$ ,  $B$  y  $C$  no alineados.

- a) Realice un dibujo como la figura 2.2.2.
- b) Muestre que ni  $A$  ni  $B$  ni  $C$  se encuentran en la recta  $PQR$ .
- c) Muestre que  $R$  no puede estar entre  $P$  y  $Q$  (sugerencia: suponga, para reducir el problema al absurdo, que  $R$  está entre  $P$  y  $Q$ , y use el teorema 27 sobre los puntos  $P$ ,  $B$ ,  $Q$  y  $C$  para llegar a un absurdo).
- d) Muestre que  $P$  no puede estar entre  $R$  y  $Q$ , ni  $Q$  entre  $P$  y  $R$ .
- e) Concluya una contradicción con el teorema 31.

2. Concluya con el teorema.

**Lema 35.** (*Lema de los segmentos solapados*) Si  $B$  está en el segmento  $AC$  y  $C$  en el  $BD$ , entonces  $B$  y  $C$  están en el segmento  $AD$ . En palabras sencillas, si dos segmentos se “solapan” los extremos solapados están en el segmento determinado por los extremos “libres”.

**Ejercicio 36.** Pruebe el lema 35 siguiendo los pasos a continuación.

1. Trace la recta  $a = AB$ .
2. Marque el punto  $C$  tal que  $B$  esté entre  $A$  y  $C$ .

## 2.2. CONSECUENCIAS DE INCIDENCIA Y DE ORDEN

---

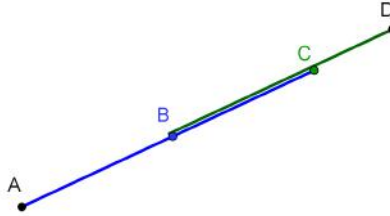


Figura 2.2.3: Segmentos solapados

3. Marque el punto  $D$  tal que  $C$  esté entre  $B$  y  $D$ .
4. Marque un punto  $E$  fuera de  $a$ .
5. Trace la recta  $b = CE$ .
6. Muestre que existe un punto  $F$  tal que  $E$  está entre  $C$  y  $F$ . Marque  $F$ .
7. Muestre que  $F$  no está en  $a$ .
8. Marque la recta  $c = AE$ .
9. Trace la recta  $d = FB$ .
10. Aplique el teorema 27 a los puntos  $A$ ,  $E$ ,  $C$  y  $F$  para demostrar que debe existir un punto  $G$  entre  $A$  y  $E$ . Dibuje a  $G$ .
11. Muestre que  $G$  no está en  $a$ .
12. Marque la recta  $e = GD$ .
13. Aplique el teorema 27 a los puntos  $F$ ,  $B$ ,  $C$  y  $A$  para demostrar el punto  $G$  está entre  $B$  y  $F$ .
14. Aplique el teorema 27 a los puntos  $D$ ,  $G$ ,  $B$  y  $F$  para demostrar que debe existir un punto  $H$  entre  $G$  y  $D$ . Dibuje a  $H$ .
15. Aplique el teorema 27 a los puntos  $D$ ,  $G$ ,  $A$  y  $E$  para demostrar que  $C$  está entre  $A$  y  $D$ .

16. Repita los pasos de la prueba intercambiando los puntos  $A$  por  $D$  y  $B$  por  $C$ .
17. Concluya la prueba.

**Lema 37.** (*Lema de los segmentos encajados*) Si un punto  $C$  está en el segmento  $AD$  y un punto  $B$  en el  $AC$ , entonces  $B$  se encuentra asimismo en el segmento  $AD$ , y  $C$  en el  $BD$ . En palabras sencillas, si un segmento está “encajado” en otro, los puntos del primero están en el segundo.

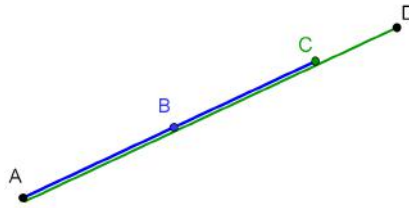


Figura 2.2.4: Segmentos encajados

**Ejercicio 38.** Pruebe el lema 37 siguiendo los pasos a continuación.

1. Trace la recta  $a = AB$ .
2. Marque el punto  $C$  tal que  $B$  esté entre  $A$  y  $C$ .
3. Marque el punto  $D$  tal que  $C$  esté entre  $B$  y  $D$ .
4. Marque un punto  $E$  fuera de  $a$ .
5. Trace la recta  $b = BE$ .
6. Muestre que existe un punto  $F$  tal que  $E$  está entre  $B$  y  $F$ . Marque  $F$ .
7. Muestre que  $F$  no está en  $a$ .
8. Marque la recta  $c = ED$ .

## 2.2. CONSECUENCIAS DE INCIDENCIA Y DE ORDEN

---

9. Trace la recta  $d = FC$ .
10. Trace la recta  $e = AE$ .
11. Muestre que  $d$  no tiene puntos entre  $A$  y  $B$ , ni puntos entre  $E$  y  $B$ . Concluya usando el axioma de Pasch que **no** tiene puntos entre  $A$  y  $E$ .
12. Aplique el axioma de Pasch a la recta  $d = FC$  y a los puntos  $A$ ,  $E$  y  $D$  para mostrar que  $d$  corta al segmento  $ED$  en un punto  $G$ . Dibuje a  $G$ .
13. Aplique el teorema 27 a los puntos  $D$ ,  $E$ ,  $B$  y  $F$  para demostrar que  $C$  está entre  $B$  y  $D$ .
14. Concluya la prueba. (Note que probó que  $C$  está entre  $B$  y  $D$ , y por hipótesis  $B$  está entre  $A$  y  $C$ . Lea el lema 35).

**Corolario 39.** *Si los puntos  $C$  y  $D$  están entre los puntos  $A$  y  $B$ , todos los puntos del segmento  $CD$  pertenecen al segmento  $AB$ .*

*Observación 40.* En la disposición del corolario 39 decimos que el segmento  $CD$  está en el segmento  $AB$ .

**Ejercicio 41.** Pruebe el corolario 39 siguiendo los pasos a continuación.

1. Trace la recta  $a = AB$ .
2. Marque un punto  $C$  entre  $A$  y  $B$ .
3. Suponga primeramente que el punto  $D$  está entre  $A$  y  $C$ . Dibuje a  $D$ .
  - a) Marque un punto  $E$  entre  $C$  y  $D$ .
  - b) Muestre que  $E$  está entre  $A$  y  $C$  (sugerencia: use el lema de los segmentos encajados 37).
  - c) Muestre que  $E$  está entre  $A$  y  $B$  (sugerencia: use el lema de los segmentos encajados 37).

4. Suponga ahora que el punto  $C$  está entre  $A$  y  $D$ . Arrastre a  $C$  y  $D$  hasta que  $C$  esté entre  $A$  y  $D$ , pero  $C$  y  $D$  ambos entre  $A$  y  $B$ .
  - a) Arrastre a  $E$  hasta que quede entre  $C$  y  $D$ .
  - b) Muestre que  $E$  está entre  $A$  y  $D$  (sugerencia: use el lema de los segmentos encajados 37).
  - c) Muestre que  $E$  está entre  $A$  y  $B$  (sugerencia: use el lema de los segmentos encajados 37).
5. Muestre que es contradictorio que  $A$  esté entre  $C$  y  $D$ , con la suposición de que  $C$  y  $D$  estén entre  $A$  y  $B$  (sugerencia: use el lema de los segmentos solapados 35)
6. Verifique que hemos considerado todos los casos con respecto a los puntos  $A$ ,  $C$  y  $D$ .
7. Concluya la prueba.

**Proposición 42.** *Si un punto  $C$  está entre los puntos  $A$  y  $B$ , entonces los puntos del segmento  $AC$  no pueden estar en el segmento  $CB$  (con excepción de  $C$ ).*

**Ejercicio 43.** Pruebe la proposición 42 siguiendo los pasos a continuación.

1. Trace la recta  $a = AB$  y un punto  $C$  entre  $A$  y  $B$ .
2. Marque un punto  $P$  entre  $A$  y  $C$ .
3. Suponga, para reducir el problema al método del absurdo, que  $P$  está entre  $B$  y  $C$ .
  - a) Muestre que  $C$  está entre  $A$  y  $P$  (sugerencia: use el lema de los segmentos encajados 37).
  - b) Muestre que esto es contradictorio.

## 2.2. CONSECUENCIAS DE INCIDENCIA Y DE ORDEN

---

4. Concluya la prueba.

**Proposición 44.** *Si  $C$  está entre  $A$  y  $B$ , entonces todo punto del segmento  $AB$  distinto de  $C$ , está o bien en el segmento  $AC$  o bien en el segmento  $CB$  (no en ambos).*

**Ejercicio 45.** Pruebe la proposición 44 siguiendo los pasos a continuación.

1. Trace la recta  $a = AB$  y un punto  $C$  entre  $A$  y  $B$ .
2. Muestre que para tres puntos sobre  $a$ ,  $A$ ,  $P$  y  $C$  solamente pueden darse los casos excluyentemente (sugerencia: considere el teorema 31):
  - a)  $A$  entre  $P$  y  $C$ .
  - b)  $P$  entre  $A$  y  $C$ .
  - c)  $C$  entre  $P$  y  $A$ .
3. Muestre que el caso  $A$  entre  $P$  y  $C$  es contradictorio con la suposición  $P$  entre  $A$  y  $B$  (sugerencia: recuerde que por hipótesis  $C$  está entre  $A$  y  $B$  y use el lema de los segmentos solapados (lema 35)).
4. Muestre que el caso  $C$  entre  $P$  y  $A$  implica que  $P$  está entre  $B$  y  $C$  (sugerencia: use el lema de los segmentos solapados (lema 35)).
5. Concluya que un punto  $P$  entre  $A$  y  $B$  solamente debe estar entre  $A$  y  $C$ , o entre  $B$  y  $C$ .
6. Muestre que  $P$  no puede estar a la vez entre  $A$  y  $C$ , y entre  $B$  y  $C$  (sugerencia: use la proposición 42).
7. Concluya la prueba.

**Corolario 46.** *Si el punto  $C$  está entre  $A$  y  $B$ , entonces todos los puntos del segmento  $AC$  y todos los puntos del segmento  $BC$  están entre  $A$  y  $B$ .*

**Ejercicio 47.** Pruebe el corolario 46.

**Corolario 48.** *Sean tres puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$  de una recta  $a$ , tal que  $B$  está entre  $A$  y  $C$ . Cualquier punto  $P$  de  $a$  cumple una y sólo una de las siguientes condiciones:*

1.  $C$  entre  $A$  y  $P$ ,  $C$  entre  $B$  y  $P$  y  $B$  entre  $A$  y  $P$ .
2.  $C = P$  y  $B$  entre  $A$  y  $P$ .
3.  $P$  entre  $B$  y  $C$ ,  $P$  entre  $A$  y  $C$  y  $B$  entre  $A$  y  $P$ .
4.  $P = B$  y  $P$  entre  $A$  y  $C$ .
5.  $P$  entre  $A$  y  $B$ ,  $P$  entre  $A$  y  $C$  y  $B$  entre  $P$  y  $C$ .
6.  $P = A$  y  $B$  entre  $P$  y  $C$ .
7.  $A$  entre  $P$  y  $C$ ,  $A$  entre  $P$  y  $B$  y  $B$  entre  $P$  y  $C$ .

**Ejercicio 49.** Pruebe el corolario 48 (sugerencia: use el teorema 31 para mostrar que estos son los únicos casos posibles para  $A$ ,  $C$  y  $P$ . Note que los únicos casos posibles para  $P$  está entre  $A$  y  $C$ , con  $P \neq B$ , son el 3 y el 5. Aplique el teorema 37 para probar los casos 1, 3, 5 y 7).

**Teorema 50.** *Entre dos puntos diferentes de una recta existen infinitos puntos de ésta.*

**Ejercicio 51.** Pruebe el teorema 50 siguiendo los pasos a continuación.

1. Trace la recta  $a = AB$ .
2. Pruebe la existencia de un punto  $C_1$  entre  $A$  y  $B$ . Marque  $C_1$  (sugerencia: use el teorema 29).

## 2.2. CONSECUENCIAS DE INCIDENCIA Y DE ORDEN

---

3. Pruebe que  $A$ ,  $B$  y  $C_1$  son distintos (sugerencia: use el axioma II 1).
4. Pruebe la existencia de un punto  $C_2$  entre  $A$  y  $C_1$ . Marque  $C_2$  (sugerencia: use el teorema 29).
5. Pruebe que  $A$ ,  $B$ ,  $C_1$  y  $C_2$  son distintos (sugerencia: use el lema 37).
6. Pruebe la existencia de un punto  $C_3$  entre  $A$  y  $C_2$ . Marque  $C_3$ .
7. Pruebe que  $A$ ,  $B$ ,  $C_1$ ,  $C_2$  y  $C_3$  son distintos.
8. Pruebe por inducción que, dados dos puntos  $A$  y  $B$  sobre la recta  $a$ , existe una sucesión  $C_1, \dots, C_n$ , de puntos distintos dos a dos, entre  $A$  y  $B$  tales que  $C_{j+1}$  está entre  $A$  y  $C_j$ , con  $1 \leq j < n$ , para todo  $n$ .
  - a) Pruebe el paso base, es decir, pruebe la existencia de un punto  $C_1$  entre  $A$  y  $B$  (sugerencia: use el teorema 29).
  - b) Pruebe el paso inductivo, es decir, suponga que para un  $k$  entero positivo fijo se cumple que existe una sucesión  $C_1, \dots, C_k$ , de puntos distintos dos a dos, entre  $A$  y  $B$  tales que  $C_{j+1}$  está entre  $A$  y  $C_j$ , con  $1 \leq j < k + 1$ , y muestre que la proposición se cumple con  $k + 1$ .
    - 1) Muestre que existe un punto  $C_{k+1}$  entre  $A$  y  $C_k$  (sugerencia: use el teorema 29).
    - 2) Muestre que  $C_{k+1}$  está entre  $A$  y  $B$  (sugerencia: use el teorema 37).
    - 3) Muestre que  $C_{k+1}$  está entre  $A$  y  $C_j$ , con  $1 \leq j < k$  (sugerencia: use el teorema 37).
    - 4) Muestre que  $C_{k+1}$  es distinto de  $C_j$ , con  $1 \leq j < k$ .
    - 5) Demuestre que existe una sucesión  $C_1, \dots, C_{k+1}$  de puntos, distintos dos a dos, entre  $A$  y  $B$  tales que  $C_{j+1}$  está entre  $A$  y  $C_j$ , con  $1 \leq j < k + 1$ ).

9. Concluya la prueba.

**Corolario 52.** *Cada recta y cada plano tiene infinitos puntos.*

**Ejercicio 53.** Pruebe el corolario 52 (sugerencia: use la proposición 25 y el teorema 50).

**Definición 54.** Sea  $O$  un punto sobre una recta  $a$ . Sean  $A$  y  $B$  puntos de  $a$  distintos de  $O$ . Si  $O$  no está entre  $A$  y  $B$ , decimos que  $A$  y  $B$  están del mismo lado con respecto a  $O$ . Si  $O$  está entre  $A$  y  $B$ , decimos que  $A$  y  $B$  están en lados diferentes con respecto a  $O$ .

**Teorema 55. (Separación en la recta)** *El punto  $O$  de la recta  $a$  divide todos los demás puntos de la recta en dos clases<sup>3</sup> no vacías, de modo que dos puntos cualesquiera de  $a$  pertenecientes a una misma clase están a un mismo lado de  $O$ , mientras que dos puntos pertenecientes a distintas clases se encuentran en lados diferentes con respecto a  $O$ .*

**Ejercicio 56.** Pruebe el teorema 55 siguiendo los pasos a continuación.

1. Pruebe que dada una recta  $a$  cualquiera y un punto  $O$  en  $a$ , existe un punto  $A$  en  $a$  distinto de  $O$ .
2. Vamos a probar que existe un punto  $X \neq O$  tal que  $A$  y  $X$  están del mismo lado con respecto a  $O$  y existe un punto  $Y \neq O$  tal que  $A$  y  $Y$  están en lados diferentes respecto de  $O$ .
  - a) Pruebe que existe un punto  $X$  tal que  $A$  está entre  $O$  y  $X$ .
  - b) Pruebe que  $O$  no puede estar entre  $A$  y  $X$ .
  - c) Pruebe que  $A$  y  $X$  están del mismo lado con respecto a  $O$ .
  - d) Muestre que existe un punto  $Y$  tal que  $A$  y  $Y$  están en lados diferentes respecto a  $O$ .

---

<sup>2</sup> $A$  y  $B$  no son necesariamente distintos.

<sup>3</sup>Una clase o clase de equivalencia es un conjunto inducido por una relación de equivalencia, es decir, una relación que es reflexiva, simétrica y transitiva.

## 2.2. CONSECUENCIAS DE INCIDENCIA Y DE ORDEN

---

3. Sean  $A$  y  $B$  dos puntos de  $a$  a distintos lados de  $O$ . Considere un punto  $C$  sobre  $a$  distinto de  $O$ . Use el corolario 48 para mostrar que puede darse una y solo una de las siguientes situaciones:
- a)  $A$  y  $C$  están del mismo lado con respecto a  $O$ , y  $B$  y  $C$  están en lados diferentes con respecto a  $O$ .
  - b)  $B$  y  $C$  están del mismo lado con respecto a  $O$ , y  $A$  y  $C$  están en lados diferentes con respecto a  $O$ .
4. Verifique que dado un punto  $O$  y cualquier punto  $A \neq O$  sobre la recta  $a$ , los puntos de  $a$  se separan en los siguientes tres conjuntos no vacíos y disjuntos:
- $\mathcal{A} = \{C : A \text{ y } C \text{ están del mismo lado con respecto a } O\}$
  - $\{O\}$
  - $\mathcal{B} = \{C : A \text{ y } C \text{ están en lados diferentes con respecto a } O\}$
- a) Sea  $D$  un punto cualquiera tal que  $A$  y  $D$  están del mismo lado con respecto a  $O$ . Sean
- $\mathcal{A}' = \{C : D \text{ y } C \text{ están del mismo lado con respecto a } O\}$
  - $\mathcal{B}' = \{C : D \text{ y } C \text{ están en lados diferentes con respecto a } O\}$
- Muestre que  $\mathcal{A} = \mathcal{A}'$  y  $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$  (sugerencia: use el corolario 48)
- b) Sea  $E$  un punto cualquiera tal que  $A$  y  $E$  están en lados diferentes con respecto a  $O$ . Sean
- $\mathcal{A}'' = \{C : E \text{ y } C \text{ están del mismo lado con respecto a } O\}$
  - $\mathcal{B}'' = \{C : E \text{ y } C \text{ están en lados diferentes con respecto a } O\}$
- Muestre que  $\mathcal{A} = \mathcal{B}''$  y  $\mathcal{B} = \mathcal{A}''$  (sugerencia: use el corolario 48).

5. Concluya que dado un punto  $O$  sobre la recta  $a$ , los puntos de  $a$  distintos de  $O$  están solamente en dos conjuntos disjuntos no vacíos, con la propiedad que si dos puntos cualquiera  $X$  y  $Y$  están en uno de los conjuntos entonces el segmento  $XY$  está en este conjunto; y si los puntos  $X$  y  $Y$  están en conjuntos diferentes entonces el segmento  $XY$  tiene al punto  $O$ .
  
6. Para probar que la relación definida sobre los puntos de la recta  $a$  distintos de  $O$ , *estar del mismo lado*, es de equivalencia, es decir, cumple con la reflexividad, simetría y transitividad, opere como sigue: suponga que  $D$ ,  $E$  y  $F$  están sobre  $a$  y son distintos de  $O$ .
  - a) Muestre que para todo punto  $D$ ,  $D$  está sobre el mismo lado que  $D$  (reflexividad).
  - b) Muestre que si  $D$  está del mismo lado que  $E$ , entonces  $E$  está del mismo lado que  $D$  (simetría).
  - c) Use el corolario 48 para mostrar que, si  $D$  está del mismo lado que  $E$  y  $E$  está del mismo lado que  $F$ , entonces  $D$  está del mismo lado que  $F$  (transitividad).
  
7. Concluya con la prueba.

**Definición 57.** A las clases de equivalencia que se indican en el teorema 55 las llamamos *lados de un punto en una recta*.

- Decimos que un punto  $O$  de una recta  $a$  junto con otro punto  $A$  de la misma recta determinan una *semirrecta* o *rayo*  $OA$ .
- Los puntos que están del mismo lado que  $A$  con respecto a  $O$  se denominan *puntos de la semirrecta* (abierta)  $OA$ .
- Al punto  $O$  le llamamos *origen* de la semirrecta.
- Los puntos que están al otro lado de  $A$  con respecto a  $O$  se denominan *puntos de la semirrecta opuesta de*  $OA$ .

## 2.2. CONSECUENCIAS DE INCIDENCIA Y DE ORDEN

---

- A la recta  $OA$  la llamamos *prolongación de la semirrecta  $OA$* .

**Proposición 58.** *Dados dos puntos  $A$  y  $B$ , un punto  $C$  está en las semirrectas (abiertas)  $AB$  y  $BA$  si y solo si está entre  $A$  y  $B$ .*

**Ejercicio 59.** Pruebe la proposición 58 siguiendo los pasos a continuación

1. Dibuje una recta  $a = AB$ .
2. Dibuje un punto  $C$  que esté en las semirrectas abiertas  $AB$  y  $BA$ .
3. Muestre que los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$  son puntos distintos sobre la misma recta.
4. Muestre que solamente puede darse uno y solo uno de los siguientes casos (sugerencia: vea el teorema 31)
  - a)  $A$  entre  $B$  y  $C$ .
  - b)  $B$  entre  $A$  y  $C$ .
  - c)  $C$  entre  $A$  y  $B$ .
5. Muestre que los casos:  $A$  entre  $B$  y  $C$ , y  $B$  entre  $A$  y  $C$  son contradictorios con el hecho que  $C$  está en las semirrectas  $AB$  y  $BA$ .
6. Concluya con la condición necesaria.
7. Considere que el punto  $C$  está entre  $A$  y  $B$ .
8. Muestre que  $A$  no puede estar entre  $C$  y  $B$  ni  $B$  entre  $C$  y  $A$ .
9. Concluya la condición suficiente.
10. Concluya la prueba.

### 2.3. Orden de los puntos de una semirrecta

**Definición 60.** Sea la semirrecta  $a = OA$  y los puntos  $B$  y  $C$  de ésta. Definimos el *orden en la semirrecta*  $OA$  definiendo la relación *precede a* como sigue:  $B$  precede a  $C$  si el punto  $B$  está entre  $O$  y  $C$ . Podemos decir también *antes* o *es menor* como sinónimos. Incluso podemos usar el símbolo  $<$ . Utilizamos también los antónimos para indicar la relación inversa entre los puntos.

**Teorema 61.** *Si en la semirrecta  $OA$  se establece el orden dado por la definición 60, entonces cualesquiera sean los puntos  $C$ ,  $D$  y  $E$  de la semirrecta  $OA$ , se cumple que:*

1. *para ningún punto  $D$  se cumple  $D < D$  (arreflexividad)<sup>4</sup>.*
2. *si  $C < D$  y  $D < E$  entonces  $C < E$  (transitividad).*
3.  *$C < D$ , ó  $C = D$ , ó  $D < C$  (tricotomía)<sup>5</sup>.*

**Ejercicio 62.** Pruebe el teorema 61 siguiendo los pasos a continuación.

1. Use el axioma II 1 para probar la arreflexividad.
2. Dibuje una semirrecta  $a = OA$ .
3. Oculte a  $A$ .
4. Dibuje los puntos  $C$ ,  $D$  sobre  $a$  de tal modo que  $C < D$ , es decir que  $C$  esté entre  $O$  y  $D$ .
5. Dibuje el punto  $E$  sobre  $a$  de tal modo que  $D < E$ , es decir que  $D$  esté entre  $O$  y  $E$ .

---

<sup>4</sup>Esta propiedad se refiere a que ningún punto está relacionado consigo mismo.

<sup>5</sup>En realidad, puede haber definiciones de orden menos restrictivas, especialmente en lo referente a la tricotomía donde puede sustituirse el “o” excluyente por la disyunción común.

### 2.3. ORDEN DE LOS PUNTOS DE UNA SEMIRRECTA

---

6. Use el lema 37 para demostrar que  $C$  está entre  $O$  y  $E$ , es decir,  $C < E$ .
7. Concluya que el orden de los puntos en una semirrecta satisface la transitividad.
8. Use el teorema 31 para demostrar que para los tres puntos  $O$ ,  $C$  y  $D$ , solamente pueden darse alguno de los casos siguientes excluyentes:
  - a)  $C$  está entre  $O$  y  $D$ , en cuyo caso  $C < D$ .
  - b)  $D$  está entre  $O$  y  $C$ , en cuyo caso  $D < C$ .
  - c)  $O$  está entre  $C$  y  $D$ . Muestre que este caso es incompatible con la elección de  $C$  y  $D$  en la semirrecta  $a$  de origen  $O$ .
9. Muestre que los siguientes casos no son posibles:
  - a)  $C < D$  y  $D < C$  (sugerencia: use la transitividad y arreflexividad).
  - b)  $C < D$  y  $D = C$  (sugerencia: use la sustitución y la arreflexividad).
10. Concluya con la tricotomía de esta relación de orden.
11. Concluya con la prueba.

**Definición 63.** Un conjunto donde se ha fijado una relación entre sus elementos se dice que está *linealmente ordenado* si esta relación cumple que es arreflexiva, transitiva y si dados dos elementos de este conjuntos uno es menor que otro. Este tipo de relación entre los elementos de un conjunto se dice *de orden lineal*. Si un conjunto está linealmente ordenado y existe un punto que es el menor de todos, se llama *punto mínimo* y del mismo modo, si un punto es mayor que todos se denomina *punto máximo*.

*Observación 64.* Una relación de orden lineal también cumple con la tricotomía (que se separa en tres), es decir, no es posible que un elemento sea menor que otro y que a la vez el segundo menor que el primero ni que sean iguales. Note que en la prueba de la tricotomía del teorema 61 se usa la sustitución, la arreflexividad, y la transitividad.

**Definición 65.** Una *relación de orden* sobre un conjunto  $S$  es

1. *densa* si y solo si dados dos elementos  $A$  y  $B$  en  $S$ , tal que  $A < B$ , entonces existe un elemento  $C$  en  $S$  tal que  $A < C$  y  $C < B$  (abreviado  $A < C < B$ ).
2. *abierto* si y solo si dado un elemento  $A$  en  $S$ , existe un elemento  $P$  en  $S$  tal que  $A < P$  y un elemento  $Q$  en  $S$  tal que  $Q < A$ .

**Teorema 66.** *El orden de los puntos en una semirrecta  $a$  es denso y abierto.*

**Ejercicio 67.** Pruebe el teorema 71 siguiendo los pasos a continuación.

1. Dibuje la semirrecta  $a = OA$ .
2. Marque en  $a$  un punto  $B$  tal que  $A$  esté entre  $B$  y  $O$ .
3. Muestre que existe un punto  $C$  que está entre  $A$  y  $B$ . Dibújelo (sugerencia: use el teorema 29).
4. Muestre que  $C$  está entre  $B$  y  $O$ ; y  $A$  entre  $C$  y  $O$  (sugerencia: use el lema 37).
5. Muestre que  $C$  está en  $a$  y que  $A < C$  y  $C < B$  (sugerencia: use los axiomas II 1 y II 3).
6. Concluya que el orden en  $a$  es denso.
7. Oculte los puntos  $B$  y  $C$ .

8. Muestre que existe un punto  $P$  tal que  $A$  está entre  $O$  y  $P$  (sugerencia: use el axioma II 2).
9. Muestre que  $P$  está en  $a$  y que  $A < P$ .
10. Muestre que existe un punto  $Q$  que está entre  $A$  y  $O$  (sugerencia: use el teorema 29).
11. Muestre que  $Q$  está en  $a$  y que  $Q < A$ .
12. Concluya que el orden en  $a$  es abierto.
13. Concluya la prueba.

## 2.4. Orden de los puntos de una recta

**Definición 68.** A una de las dos semirrectas de una recta  $a$ , determinadas por  $O$ , la llamamos *primera*, y a la otra, *segunda*. Dados dos puntos  $A$  y  $B$  sobre  $a$ , decimos  $A < B$  sobre la recta  $a$  si y solamente si:

- Caso 1.*  $B < A$  en la primera semirrecta.
- Caso 2.*  $B = O$  y  $A$  está en la primera semirrecta.
- Caso 3.*  $B$  está en la segunda semirrecta y  $A$  en la primera.
- Caso 4.*  $B$  está en la segunda semirrecta y  $A = O$ .
- Caso 5.*  $A < B$  en la segunda semirrecta.

*Observación 69.* Al definir el orden en una recta partimos de la definición de orden en una semirrecta, la que a su vez se basa en el concepto primitivo de la teoría de la Geometría Euclidiana como es la relación “estar entre”. Para definir orden en una recta, implícitamente queda claro que si  $A < B$  entonces no puede cumplirse que  $B < A$  ni que  $A = B$ .

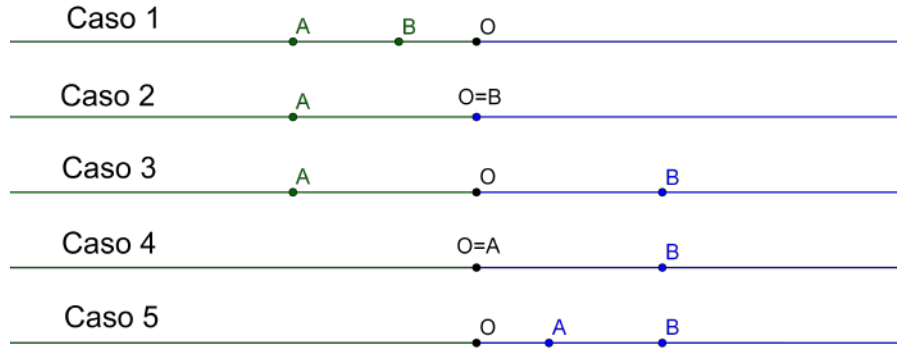


Figura 2.4.1: Orden de puntos en la recta

Un aspecto importante a tener en cuenta es que la definición de orden en la recta se define por casos, por tanto, debemos considerar los cinco casos que requiere la misma. Por ejemplo, para comprobar que la definición de orden es una buena definición debemos verificar que se cumpla la arreflexividad, la transitividad y una tricotomía. En el caso de la arreflexividad, dado que solamente hay una variable en juego, la cantidad de los casos a considerar son solamente tres: el punto  $A$  está en la primera semirrecta, o está en la segunda, o es el propio  $O$ . En todos los casos, la prueba se basa en el teorema 61. Para el caso de la tricotomía:

$$A < B \vee A = B \vee B < A$$

como las variables son dos, los casos a considerar serán nueve. Representamos estos casos en el Cuadro 2.1.

Este cuadro tiene en las primeras dos columnas las posiciones de los puntos  $A$  y  $B$  en las semirrectas primera (-1), segunda (1) o (0) si son el propio punto  $O$ . Por ejemplo,  $A$  en -1 significa que  $A$  está en la primera semirrecta. La letra “V” indica que se cumple la relación correspondiente a esa columna. Por ejemplo, en la cuarta fila, se indica que  $A$  es  $O$ ,  $B$  está en la primera semirrecta y, por lo tanto, se cumple la condición  $B < A$  (y por la definición de orden no se cumple ni que

2.4. ORDEN DE LOS PUNTOS DE UNA RECTA

$A$	$B$	$A < B$	$A = B$	$B < A$	Caso	Tricotomía
-1	-1				Pruebe	V
-1	0	V			2	V
-1	1	V			3	V
0	-1			V	2	V
0	0		V		2	V
0	1	V			4	V
1	-1			V	3	V
1	0			V	4	V
1	1				Pruebe	V

Cuadro 2.1: Tricotomía de orden en la recta

$A < B$ , ni que  $A = B$ ), debido al Caso 2 (que se consigna en la sexta columna) de la definición de orden en la recta, por lo tanto se cumple la disyunción de la última columna. Hay dos casos que requieren más cuidado y que son los correspondientes a la primera y última fila. Notemos por  $<_p$  el orden en la primera semirrecta,  $<_s$  el orden en la segunda semirrecta y por  $<$  el orden en la recta.

Consideremos la situación de la primera fila. Si los puntos  $A$  y  $B$  están en la primera semirrecta hemos probado en el teorema 61 que

$$A <_p B \vee A = B \vee B <_p A$$

entonces, según la definición:

$$B < A \vee A = B \vee A < B$$

conmutando adecuadamente resulta

$$A < B \vee A = B \vee B < A$$

lo que implica la tricotomía para este caso en la recta. En el último caso, si los puntos  $A$  y  $B$  están en la segunda semirrecta, hemos probado en el teorema 61 que

$$A <_s B \vee A = B \vee B <_s A$$

así, según la definición:

$$A < B \vee A = B \vee B < A$$

lo que implica la tricotomía para este caso en la recta.

El caso de la transitividad:

$$A < B \wedge B < C \rightarrow A < C$$

es similar pero en esta ocasión las variables son tres y por lo tanto los casos a considerar serán 27, los que están consignados en el Cuadro 2.2.

El lector debe recordar que basta que el antecedente sea falso o el consecuente cierto para que se cumpla una implicación. Hay dos casos que requieren más cuidado y que son los correspondientes a la primera y última fila.

Consideremos la primera fila. Si los puntos  $A$ ,  $B$ , y  $C$  están en la primera semirrecta entonces si

$$A < B \wedge B < C$$

implica según la definición que

$$B <_p A \wedge C <_p B$$

que conmutando adecuadamente queda

$$C <_p B \wedge B <_p A$$

y que según el teorema 61 implica

$$C <_p A$$

y por definición

$$A < C$$

probamos, de esta manera, la transitividad para este caso.

2.4. ORDEN DE LOS PUNTOS DE UNA RECTA

$A$	$B$	$C$	$A < B$	$B < C$	$A < C$	Caso	Transitividad
-1	-1	-1				Pruebe	V
-1	-1	0			V	2	V
-1	-1	1			V	3	V
-1	0	-1		F		2	V
-1	0	0			V	2	V
-1	0	1			V	3	V
-1	1	-1		F		3	V
-1	1	0			V	2	V
-1	1	1			V	3	V
0	-1	-1	F			2	V
0	-1	0	F			2	V
0	-1	1			V	4	V
0	0	-1		F		2	V
0	0	0	F				V
0	0	1			V	4	V
0	1	-1		F		3	V
0	1	0		F		4	V
0	1	1			V	4	V
1	-1	-1	F			3	V
1	-1	0	F			3	V
1	-1	1	F			3	V
1	0	-1	F			4	V
1	0	0	F			4	V
1	0	1	F			4	V
1	1	-1		F		3	V
1	1	0		F		4	V
1	1	1				Pruebe	V

Cuadro 2.2: Transitividad de orden en la recta

En el último caso, si los puntos  $A$ ,  $B$ , y  $C$  están en la segunda semirrecta, entonces si

$$A < B \wedge B < C$$

implica según la definición que

$$A <_s B \wedge B <_s C$$

y que según el teorema 61 implica

$$A <_s C$$

y por definición:

$$A < C$$

probamos, de esta manera, la transitividad para este caso.

**Ejercicio 70.** Verifique que el orden de los puntos en la recta definido arriba es efectivamente un orden lineal (sugerencia: revise los cuadros 2.1 y 2.2).

**Teorema 71.** *Los puntos sobre una recta pueden ser ordenados de forma compatible con la relación “estar entre” de dos maneras posibles únicamente, y estos dos órdenes son opuestos uno del otro. En otras palabras, si se toma dos puntos distintos  $X$  y  $Y$  sobre una recta  $a$ , entonces  $X$  precederá a  $Y$  en un orden y  $Y$  precederá a  $X$  en el otro orden, y estos órdenes no dependen de la elección del punto  $O$  que se usa para definirlo.*

**Ejercicio 72.** Pruebe el teorema 71 siguiendo los pasos a continuación (sugerencia: use la notación  $<_O$  para indicar el orden de los puntos en una recta considerando el punto  $O$  como el origen de las semirrectas que inducen el orden y  $<_{O'}$  para indicar el orden de los puntos en la recta considerando el punto  $O'$  como el origen de las semirrectas que inducen este orden).

1. Dibuje una recta  $a = OO'$ .

## 2.4. ORDEN DE LOS PUNTOS DE UNA RECTA

---

2. Suponga que  $O'$  está en la segunda semirrecta de  $O$  y  $O$  en la primera semirrecta de  $O'$  y que  $X <_O Y$ .
  - a) Considere que los puntos  $X$  y  $Y$  están en la segunda semirrecta con respecto a  $O$ . En este caso  $X$  está entre  $O$  y  $Y$ . Dibuje los puntos  $X$  y  $Y$ . Use el corolario 48 para concluir en todos los casos que  $X <_{O'} Y$ . (En este caso  $A, B, C$  y  $P$  del corolario 48 son respectivamente  $O, X, Y$  y  $O'$ ).
  - b) Considere que los puntos  $X$  y  $Y$  están en la primera semirrecta con respecto a  $O$ . En este caso  $Y$  está entre  $O$  y  $X$ . Arrastre los puntos  $X$  y  $Y$  hasta que contemplen esta situación. Use el corolario 48 para concluir en todos los casos que  $X <_{O'} Y$ . (En este caso  $A, B, C$  y  $P$  del teorema 48, son respectivamente  $X, Y, O$  y  $O'$  respectivamente.)
  - c) Considere que  $X$  está en la primera semirrecta con respecto a  $O$  y  $Y$  en la segunda. En este caso  $O$  está entre  $X$  y  $Y$ . Arrastre los puntos  $X$  y  $Y$  hasta que contemplen esta situación. Use el teorema 48 para concluir en todos los casos que  $X <_{O'} Y$ . (En este caso  $A, B, C$  y  $P$  del teorema 48, son respectivamente  $X, O, Y$  y  $O'$  respectivamente).
  - d) Muestre que en este caso  $<_O$  coincide con  $<_{O'}$ .
3. Suponga que  $O'$  está en la segunda semirrecta de  $O$  y  $O$  en la segunda semirrecta de  $O'$  y que  $X <_O Y$ . Muestre que en este caso  $<_O$  es opuesto a  $<_{O'}$ .
4. Concluya la prueba.

**Teorema 73.** *Los dos órdenes de los puntos en una recta a compatibles con la relación estar entre, son densos y abiertos.*

**Ejercicio 74.** Pruebe el teorema 73 siguiendo los pasos a continuación.

1. Dibuje la recta  $a = AB$ .

2. Elija en  $a$  una semirrecta cualquiera  $b$  de origen  $O$ . Píntela de rojo.
3. Observe que uno de los dos órdenes de  $a$  puede ser definida por tomar  $b$  como la segunda semirrecta en  $a$  (sugerencia: vea el teorema 71).
4. Para probar la densidad, tome dos puntos  $P$  y  $Q$  sobre  $a$  y suponga que  $P < Q$  y siga los pasos a continuación.
  - a)  $P$  y  $Q$  en la segunda semirrecta
    - 1) Muestre que  $P <_s Q$ .
    - 2) Pruebe que existe un punto  $R$  en la segunda semirrecta tal que  $P <_s R <_s Q$  (sugerencia: use el teorema 66).
    - 3) Pruebe que existe un punto  $R$  en la recta  $a$  tal que  $P < R < Q$ .
  - b)  $P$  y  $Q$  en la primera semirrecta
    - 1) Muestre que  $Q <_p P$ .
    - 2) Pruebe que existe un punto  $R$  en la primera semirrecta tal que  $Q <_p R <_p P$  (sugerencia: use el teorema 66).
    - 3) Pruebe que existe un punto  $R$  en la recta  $a$  tal que  $P < R < Q$ .
  - c)  $P = O$  y  $Q$  en la segunda semirrecta
    - 1) Muestre que existe un punto  $R$  entre  $O$  y  $Q$  (sugerencia: vea el teorema 31)
    - 2) Muestre que  $R <_s Q$ .
    - 3) Pruebe que existe un punto  $R$  en la recta  $a$  tal que  $P < R < Q$ .
  - d)  $Q = O$  y  $P$  en la primera semirrecta
    - 1) Muestre que existe un punto  $R$  entre  $O$  y  $P$  (sugerencia: vea el teorema 31)
    - 2) Muestre que  $R <_p P$ .

#### 2.4. ORDEN DE LOS PUNTOS DE UNA RECTA

---

- 3) Pruebe que existe un punto  $R$  en la recta  $a$  tal que  $P < R < Q$ .
  - e)  $P$  en la primera semirrecta y  $Q$  en la segunda semirrecta
    - 1) Muestre que  $O$  está entre  $P$  y  $Q$ .
    - 2) Pruebe que existe un punto  $R$  en la recta  $a$  tal que  $P < R < Q$ .
  - f) Muestre que todos los otros casos para las posiciones de  $P$  y  $Q$  son contradictorios con la suposición que  $P < Q$ .
5. Concluya con la prueba de la densidad del orden en  $a$ .
6. Para probar la apertura, tome un punto  $P$  sobre  $a$  y siga los pasos a continuación;
- a)  $P$  en la segunda semirrecta.
    - 1) Muestre que existen puntos  $M$  y  $N$  en la segunda semirrecta tal que  $M <_s P <_s N$  (sugerencia: vea el teorema 66)
    - 2) Muestre que existen puntos  $M$  y  $N$  en la recta tal que  $M < P < N$ .
  - b)  $P$  en la primera semirrecta.
    - 1) Muestre que existen puntos  $M$  y  $N$  en la primera semirrecta tal que  $N <_p P <_p M$  (sugerencia: vea el teorema 66).
    - 2) Muestre que existen puntos  $M$  y  $N$  en la recta tal que  $M < P < N$ .
  - c)  $P = O$ .
    - 1) Muestre que existe un punto  $M$  en la primera semirrecta y un punto  $N$  en la segunda semirrecta (sugerencia: vea el teorema 55)
    - 2) Muestre que existen puntos  $M$  y  $N$  en la recta tal que  $M < P < N$ .

7. Concluya con la prueba de la apertura.
8. Concluya con la prueba.

*Observación 75.* Dados dos puntos distintos  $A$  y  $B$ , denotamos por  $<_{AB}$  a uno de los órdenes sobre los puntos de la recta  $AB$  compatibles con la relación estar entre, en el cual  $A$  precede a  $B$ .

**Teorema 76.** *Dados dos puntos distintos  $A$  y  $B$  sobre una recta  $a$ , la relación de orden  $<_{AB}$  sobre los puntos de  $a$ , cumple las siguientes propiedades:*

1.  $<_{AB}$  es una relación de orden lineal, es decir, es arreflexiva, transitiva y dos elementos distintos son comparables.
2.  $<_{AB}$  es una relación de orden denso y abierto.
3.  $A <_{AB} B$ .
4. Si  $P$  y  $Q$  son dos puntos distintos de  $a$ ,  $P <_{AB} Q$  si y sólo si  $Q <_{BA} P$ . Es decir, los puntos  $A$  y  $B$  inducen dos órdenes opuestos.
5. Si  $C$  y  $D$  son puntos distintos de  $a$ , entonces  $<_{AB} = <_{CD}$  o bien  $<_{AB} = <_{DC}$ . Es decir, alguno de los dos órdenes opuestos definidos por cualquier par de puntos coincide con  $<_{AB}$ .

**Ejercicio 77.** Pruebe el teorema 76. (Observe que el orden denotado por  $<_{AB}$  es uno de los dos únicos órdenes a los que se refiere el teorema 71. Que este orden sea denso y abierto es un resultado inmediato del teorema 73).

**Proposición 78.** *Sean  $A$ ,  $B$  y  $C$  tres puntos sobre una recta  $a$ .  $B$  está entre  $A$  y  $C$ , si y solo si o bien  $A$  precede a  $B$  y  $B$  a  $C$ , o bien  $C$  precede a  $B$  y  $B$  a  $A$ .*

**Ejercicio 79.** Pruebe la proposición 78 siguiendo los pasos a continuación.

#### 2.4. ORDEN DE LOS PUNTOS DE UNA RECTA

---

1. Dibuje los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$  sobre la recta  $a$ , de tal modo que  $B$  esté entre  $A$  y  $C$ .
2. Tome el orden sobre la recta  $a$  de tal modo que la segunda semirrecta sea  $AB$  (sugerencia: considere el teorema 71).
3. Muestre que en este caso  $A$  precede a  $B$  y  $B$  a  $C$ .
4. Tome el orden sobre la recta  $a$  de tal modo que la primera semirrecta sea  $AB$  (sugerencia: considere el teorema 71).
5. Muestre que en este caso  $C$  precede a  $B$  y  $B$  a  $A$ .
6. Concluya con la condición necesaria.
7. Suponga que  $A$  precede a  $B$  y  $B$  a  $C$  en uno de los dos ordenes en la recta  $a$ .
8. Muestre que si se toma a  $A$  como el origen de las semirrectas que definen el orden en  $a$ , entonces  $B$  y  $C$  están en la segunda semirrecta.
9. Muestre que en este caso  $B$  está entre  $A$  y  $C$ .
10. Suponga que  $C$  precede a  $B$  y  $B$  a  $A$  en uno de los dos ordenes en la recta  $a$ .
11. Muestre que si se toma a  $A$  como los orígenes de las semirrectas que definen el orden en  $a$ , entonces  $B$  y  $C$  están en la primera semirrecta.
12. Muestre que en este caso  $B$  está entre  $A$  y  $C$ .
13. Concluya con la condición suficiente.
14. Concluya con la prueba.

### 2.4.1. Orden de los puntos interiores de un segmento

**Definición 80.** Definimos dos órdenes sobre los puntos interiores de un segmento  $a = AB$  de acuerdo a los órdenes de los puntos de la recta  $r = AB$ . En este caso, decimos que los puntos interiores de un segmento heredan el orden de los puntos de la recta.

**Teorema 81.** *Los dos órdenes opuestos de los puntos (interiores) de un segmento son lineales, densos y abiertos.*

**Ejercicio 82.** Pruebe el teorema 81 siguiendo los pasos a continuación.

1. Verifique que los órdenes de los puntos de un segmento son lineales y opuestos.
2. Para demostrar la densidad tome un segmento  $a = AB$  y dos puntos  $P$  y  $Q$  en  $a$ , tal que  $P \prec Q$ . (Por el momento para hacer una distinción entre el orden de la recta y el correspondiente orden en el segmento usaremos  $<$  para el primero y  $\prec$  para el segundo).
3. Verifique que  $P < Q$ .
4. Muestre que existe  $R$  en la recta prolongación de  $a$ , tal que  $P < R < Q$  (sugerencia: use el teorema 73).
5. Muestre que  $R$  está entre  $P$  y  $Q$  (sugerencia: use el teorema 78).
6. Muestre que  $R$  está en  $a$  (sugerencia: use el corolario 39).
7. Concluya la prueba de la densidad.
8. Para demostrar la apertura tome un punto  $P$  en  $a$ .
9. Muestre que existe un punto  $M$  entre  $A$  y  $P$ , y un punto  $N$  entre  $P$  y  $B$  (sugerencia: use el teorema 29).

10. Tome primero el caso en que  $A < B$ .
11. Muestre que en este caso  $A < P < B$  (sugerencia: use el teorema 78).
12. Muestre que en este caso  $A < M < P$  y  $P < N < B$  (sugerencia: use el teorema 78).
13. Muestre que  $M$  y  $N$  están en  $a$  (sugerencia: use el teorema de los segmentos encajados 37).
14. Muestre que en este caso  $M \prec P$  y  $P \prec N$ .
15. Tome ahora el caso en que  $B < A$ .
16. Muestre que en este caso  $B < P < A$  (sugerencia: use el teorema 78).
17. Muestre que en este caso  $B < N < P$  y  $P < M < A$  (sugerencia: use el teorema 78).
18. Muestre que  $M$  y  $N$  están en  $a$  (sugerencia: use el lema de los segmentos encajados 37).
19. Muestre que en este caso  $N \prec P$  y  $P \prec M$ .
20. Concluya la prueba de la apertura.
21. Concluya la prueba.

## 2.5. Separación de los puntos de un plano y del espacio

**Definición 83.** Sea  $a$  una recta sobre un plano  $\alpha$ . Sean  $A$  y  $B$  puntos de  $\alpha$  que no están en  $a$ . Si no hay puntos de  $a$  entre  $A$  y  $B$ , decimos que  $A$  y  $B$  están del mismo lado con respecto a  $a$ . Si hay puntos de  $a$  entre  $A$  y  $B$ , decimos que  $A$  y  $B$  están en lados diferentes con respecto a  $a$ .

**Teorema 84. (*Separación en el plano*)** *La recta  $a$  del plano  $\alpha$  divide todos los demás puntos del plano en dos clases no vacías, de modo que dos puntos cualesquiera de  $\alpha$  pertenecientes a una misma clase están a un mismo lado de  $a$ , mientras que dos puntos pertenecientes a distintas clases se encuentran en lados diferentes con respecto a  $a$ .*

**Ejercicio 85.** Pruebe el teorema 84 siguiendo los pasos a continuación.

1. Pruebe que dado un plano  $\alpha$  cualquiera y una recta  $a$  en  $\alpha$ , existe un punto  $A$  en  $\alpha$  que no está en  $a$ .
2. Vamos a probar que existe un punto  $X$  en  $\alpha$ , que no está en  $a$ , tal que  $A$  y  $X$  están del mismo lado con respecto a  $a$  y existe un punto  $Y$  en  $\alpha$ , que no está en  $a$ , tal que  $A$  y  $Y$  están en lados diferentes respecto de  $a$ .
  - a) Pruebe que  $A$  y  $A$  están del mismo lado con respecto a  $a$ .
  - b) Muestre que existe un punto  $O$  en  $a$  y un punto  $B$  tal que  $O$  está entre  $A$  y  $B$ .
  - c) Muestre que  $B$  y  $A$  están en lados diferentes con respecto a  $a$ . Dibuje esta situación.
3. Considere un punto  $C$  de  $\alpha$  que no está en  $a$  y que es distinto de  $A$  y  $B$ . Muestre que puede darse una y solo una de las siguientes situaciones (note que si  $A$ ,  $B$  y  $C$  están alineados, existirá un único punto  $O$  en común entre las rectas  $a$  y  $AB$  y use el teorema 55 para concluir la prueba. Si  $A$ ,  $B$  y  $C$  no están alineados, aplique el axioma de Pasch para mostrar que  $a$  debe cortar a  $AC$  o a  $BC$  y considere el teorema 33 para demostrar que sólo lo hace una vez):
  - a)  $A$  y  $C$  están del mismo lado con respecto a  $a$ , y  $B$  y  $C$  están en lados diferentes con respecto a  $a$ .
  - b)  $B$  y  $C$  están del mismo lado con respecto a  $a$ , y  $A$  y  $C$  están en lados diferentes con respecto a  $a$ .

## 2.5. SEPARACIÓN EN EL PLANO

---

4. Verifique que dada una recta  $a$  en un plano  $\alpha$  y cualquier punto  $A$  de  $\alpha$  que no está sobre la recta  $a$ , los puntos de  $\alpha$  se separan en los siguientes tres conjuntos no vacíos y disjuntos:

a)  $\mathcal{A} = \{C : A \text{ y } C \text{ están del mismo lado con respecto a } a\}$

b)  $\{C : C \text{ está en } a\}$

c)  $\mathcal{B} = \{C : A \text{ y } C \text{ están en lados diferentes con respecto a } a\}$

5. Sea  $D$  un punto cualquiera tal que  $A$  y  $D$  están del mismo lado con respecto a  $a$ . Sean

a)  $\mathcal{A}' = \{C : D \text{ y } C \text{ están del mismo lado con respecto a } a\}$

b)  $\mathcal{B}' = \{C : D \text{ y } C \text{ están en lados diferentes con respecto a } a\}$

Muestre que  $\mathcal{A} = \mathcal{A}'$  y  $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$  (considere los casos en que  $A$ ,  $C$  y  $D$  están alineado o no).

6. Sea  $D$  un punto cualquiera tal que  $A$  y  $D$  están en lados diferentes con respecto a  $a$ . Sean

a)  $\mathcal{A}' = \{C : D \text{ y } C \text{ están del mismo lado con respecto a } a\}$

b)  $\mathcal{B}' = \{C : D \text{ y } C \text{ están en lados diferentes con respecto a } a\}$

Muestre que  $\mathcal{A} = \mathcal{B}'$  y  $\mathcal{B} = \mathcal{A}'$ .

7. Concluya que dado una recta  $a$  en el plano  $\alpha$ , los puntos de  $\alpha$  que no están en  $a$ , están solamente en dos conjuntos disjuntos no vacíos, con la propiedad que si dos puntos cualquiera  $X$  y  $Y$  están en uno de los conjuntos entonces el segmento  $XY$  está en este conjunto; y si los puntos  $X$  y  $Y$  están en conjuntos diferentes entonces el segmento  $XY$  corta a la recta  $a$ .

8. Suponga que  $D$ ,  $F$  y  $G$  están sobre  $\alpha$  y no sobre  $a$ . Muestre que:

- a)  $D$  está sobre el mismo lado que  $D$  (reflexividad).
- b) Si  $D$  está del mismo lado que  $F$ , entonces  $F$  está del mismo lado que  $D$  (simetría).
- c) Si  $D$  está del mismo lado que  $F$  y  $F$  está del mismo lado que  $G$ , entonces  $D$  está del mismo lado que  $G$  (transitividad).
  - 1) Suponga que los puntos  $D$ ,  $F$  y  $G$  están alineados (observe que si las rectas  $a$  y  $DF$  se cortan en un punto  $M$ , puede usar el teorema 55 para concluir la prueba. Si las rectas  $a$  y  $DF$  no se cortan, la conclusión es obvia).
  - 2) Suponga que los puntos  $D$ ,  $F$  y  $G$  no están alineados. Suponga para reducir el problema al absurdo que  $D$  y  $G$  no están del mismo lado con respecto a  $a$ .
    - $a'$  Muestre que  $a$  corta a  $DG$ .
    - $b'$  Muestre que  $a$  debe cortar al segmento  $DF$  o al segmento  $FG$ .
    - $c'$  Muestre que esto es contradictorio.

9. Concluya la prueba.

**Definición 86.** Las clases de equivalencia del teorema 84 se llaman *lados de una recta*. Decimos que una recta  $a$  de un plano  $\alpha$ , junto con otro punto  $A$  que no está en  $a$ , del mismo plano, determinan un *semiplano*  $\alpha'$ . A la recta  $a$  la llamamos *borde* del semiplano, A los puntos que están del mismo lado que  $A$  con respecto a  $a$  los llamamos *puntos del semiplano* de  $\alpha$  de borde  $a$  que pasa por  $A$ . A los puntos del otro lado los llamamos *puntos del semiplano opuesto*.

**Definición 87.** Sea  $\alpha$  un plano. Sean  $A$  y  $B$  puntos que no están en  $\alpha$ . Si no hay puntos de  $\alpha$  entre  $A$  y  $B$ , decimos que  $A$  y  $B$  *están del mismo lado con respecto a  $\alpha$* . Si hay puntos de  $\alpha$  entre  $A$  y  $B$ , decimos que  $A$  y  $B$  *están en lados diferentes con respecto a  $\alpha$* .

**Teorema 88. (*Separación en el espacio*)** Cada plano  $\alpha$  divide los puntos del espacio que no le pertenecen en dos clases no vacías, de manera tal que dos puntos cualesquiera  $A$  y  $B$  de clases diferentes determinan un segmento  $AB$  dentro del cual hay algún punto del plano  $\alpha$ , mientras que dos puntos arbitrarios  $A$  y  $A'$  de una misma clase determinan un segmento  $AA'$  libre de puntos de  $\alpha$ .

**Ejercicio 89.** Pruebe el teorema 88 siguiendo los pasos a continuación.

1. Pruebe que dado un plano  $\alpha$  cualquiera, existe un punto  $A$  que no está en  $\alpha$ .
2. Vamos a probar que existe un punto  $X$ , que no está en  $\alpha$ , tal que  $A$  y  $X$  están del mismo lado con respecto a  $\alpha$  y existe un punto  $Y$ , que no está en  $\alpha$ , tal que  $A$  y  $Y$  están en lados diferentes respecto de  $\alpha$ .
  - a) Pruebe que  $A$  y  $A$  están del mismo lado con respecto a  $\alpha$ .
  - b) Muestre que existe un punto  $O$  en  $\alpha$  y un punto  $B$  tal que  $O$  está entre  $A$  y  $B$ .
  - c) Muestre que  $B$  y  $A$  están en lados diferentes con respecto a  $\alpha$ . Dibuje esta situación.
3. Considere un punto  $C$  que no está en  $\alpha$  y que es distinto de  $A$  y  $B$ . Muestre que puede darse una y solo una de las siguientes situaciones (Note que si  $A$ ,  $B$  y  $C$  están alineados, existirá un único punto  $O$  en común entre el plano  $\alpha$  y la recta  $AB$ . Use el teorema 55 para concluir la prueba. Si  $A$ ,  $B$  y  $C$  no están alineados, existirá una recta  $a$  de corte entre el plano  $\alpha$  y el plano  $\beta$  determinado por  $A$ ,  $B$  y  $C$ . Use el axioma de Pasch para mostrar que  $a$  debe cortar a  $AC$  o a  $BC$  y use el teorema 33 para demostrar que sólo lo hace una vez):
  - a)  $A$  y  $C$  están del mismo lado con respecto a  $a$ , y  $B$  y  $C$  están en lados diferentes con respecto a  $a$ .

- b)  $B$  y  $C$  están del mismo lado con respecto a  $a$ , y  $A$  y  $C$  están en lados diferentes con respecto a  $a$ .
4. Verifique que dado un plano  $\alpha$  y cualquier punto  $A$  que no está en  $\alpha$ , los puntos se separan en los siguientes tres conjuntos no vacíos y disjuntos:
- a)  $\mathcal{A} = \{C : A \text{ y } C \text{ están del mismo lado con respecto a } \alpha\}$
  - b)  $\{C : C \text{ está en } \alpha\}$
  - c)  $\mathcal{B} = \{C : A \text{ y } C \text{ están en lados diferentes con respecto a } \alpha\}$

5. Sea  $D$  un punto cualquiera tal que  $A$  y  $D$  están del mismo lado con respecto a  $\alpha$ . Sean

- a)  $\mathcal{A}' = \{C : D \text{ y } C \text{ están del mismo lado con respecto a } \alpha\}$
- b)  $\mathcal{B}' = \{C : D \text{ y } C \text{ están en lados diferentes con respecto a } \alpha\}$

Muestre que  $\mathcal{A} = \mathcal{A}'$  y  $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$  (considere los casos en que  $A$ ,  $C$  y  $D$  están alineado o no).

6. Sea  $D$  un punto cualquiera tal que  $A$  y  $D$  están en lados diferentes con respecto a  $\alpha$ . Sean
- a)  $\mathcal{A}' = \{C : D \text{ y } C \text{ están del mismo lado con respecto a } \alpha\}$
  - b)  $\mathcal{B}' = \{C : D \text{ y } C \text{ están en lados diferentes con respecto a } \alpha\}$

Muestre que  $\mathcal{A} = \mathcal{B}'$  y  $\mathcal{B} = \mathcal{A}'$ .

7. Concluya que dado un plano  $\alpha$ , los puntos que no están en  $\alpha$  están solamente en dos conjuntos disjuntos no vacíos con la propiedad que si dos puntos cualquiera  $X$  y  $Y$  están en uno de los conjuntos entonces el segmento  $XY$  está en este conjunto; y si los puntos  $X$  y  $Y$  están en conjuntos diferentes entonces el segmento  $XY$  corta al plano  $\alpha$ .

8. Suponga que  $D$ ,  $F$  y  $G$  no están sobre  $\alpha$ . Muestre que:

- a)  $D$  está sobre el mismo lado que  $D$  (reflexividad).
- b) Si  $D$  está del mismo lado que  $F$ , entonces  $F$  está del mismo lado que  $D$  (simetría).
- c) Si  $D$  está del mismo lado que  $F$  y  $F$  está del mismo lado que  $G$ , entonces  $D$  está del mismo lado que  $G$  (transitividad).
  - 1) Suponga que los puntos  $D$ ,  $F$  y  $G$  están alineados (observe que si el plano  $\alpha$  y la recta  $DF$  se cortan en un punto  $M$ , puede usar el teorema 55 para concluir la prueba. Si el plano  $\alpha$  y la recta  $DF$  no se cortan la conclusión es obvia).
  - 2) Suponga que los puntos  $D$ ,  $F$  y  $G$  no están alineados. Suponga para reducir el problema al absurdo que  $D$  y  $G$  no están del mismo lado con respecto a  $\alpha$ .
    - $a'$  Muestre que existe una recta  $a$  de corte entre  $\alpha$  y el plano determinado por los puntos  $D$ ,  $F$  y  $G$ .
    - $b'$  Muestre que  $a$  corta a  $DG$ .
    - $c'$  Muestre que  $a$  debe cortar al segmento  $DF$  o al segmento  $FG$ .
    - $d'$  Muestre que esto es contradictorio.

9. Concluya la prueba.

**Definición 90.** Las clases de equivalencia del teorema 88 se llaman *lados de un plano*.

- Decimos que un plano  $\alpha$ , junto con otro punto  $A$  que no está en  $\alpha$ , determinan un *semiespacio*  $S_\alpha$ .
- Al plano  $\alpha$  le llamamos *borde* del semiespacio.
- A los puntos que están del mismo lado que  $A$  con respecto a  $\alpha$  los llamamos *puntos del semiespacio de borde  $\alpha$  que pasa por  $A$* .

- A los puntos del otro lado los llamamos *puntos del semiespacio opuesto*.

**Teorema 91.** *Sea un plano  $\alpha$ , una recta  $a$  en  $\alpha$ , un punto  $A$  en  $\alpha$  a un lado de  $a$  y un punto  $O$  en  $a$ . La semirrecta  $OA$  está completamente incluida en el semiplano de  $\alpha$  de borde  $a$  que pasa por  $A$ . Además, la semirrecta opuesta de la  $OA$  está en el semiplano de  $\alpha$  de borde  $a$  que no pasa por  $A$ .*

**Ejercicio 92.** Pruebe el teorema 91 siguiendo los pasos a continuación.

1. Dibuje la recta  $a = OP$ .
2. Marque un punto  $A$  fuera de  $a$  y llame  $\alpha_1$  al semiplano de borde  $a$  que pasa por  $A$ .
3. Trace la recta  $b = OA$ .
4. Muestre que  $b$  solamente tiene un punto en común con  $a$  y que está completamente en el plano determinado por  $A$  y  $a$ .
5. Dibuje un punto  $B$  del mismo lado que  $A$  con respecto a  $O$  (sobre  $b$ ).
6. Muestre que  $O$  no está entre  $A$  y  $B$ .
7. Muestre que  $B$  está en  $\alpha_1$  (sugerencia: use el teorema 84).
8. Concluya que la semirrecta  $OA$  está completamente en  $\alpha_1$ .
9. Arrastre a  $B$  hasta que quede en la semirrecta opuesta a  $OA$ .
10. Muestre que  $O$  está entre  $A$  y  $B$  (sugerencia: considere el teorema 55).
11. Muestre que  $B$  está en el semiplano opuesto a  $\alpha_1$  (sugerencia: use el teorema 84).

12. Concluya que la semirrecta opuesta a  $OA$  está completamente en el semiplano opuesto a  $\alpha_1$ .
13. Concluya la prueba.

**Teorema 93.** *Sea un plano  $\alpha$ , un punto  $A$  que no está en  $\alpha$  y un punto  $O$  en  $\alpha$ . La semirrecta  $OA$  está completamente incluida en el semiespacio de borde  $\alpha$  que pasa por  $A$ . Además, la semirrecta opuesta de la  $OA$  está en el semiespacio de borde  $\alpha$  que no pasa por  $A$ .*

**Ejercicio 94.** Pruebe el teorema 93 siguiendo los pasos a continuación.

1. Abra una hoja de GeoGebra en la vista 3D y oculte los ejes coordenados.
2. Marque un punto  $A$  fuera del plano  $xy$ .
3. Llame  $\alpha$  al semiespacio de borde el plano  $xy$  que pasa por  $A$ .
4. Dibuje un punto  $O$  sobre el plano  $xy$ .
5. Trace la recta  $a = OA$ .
6. Muestre que  $a$  solamente tiene al punto  $O$  en común con el plano  $xy$ .
7. Dibuje un punto  $B$  del mismo lado que  $A$  con respecto a  $O$  (sobre  $a$ ).
8. Muestre que  $O$  no está entre  $A$  y  $B$ .
9. Muestre que  $B$  está en  $\alpha$  (sugerencia: use el teorema 88).
10. Concluya que la semirrecta  $OA$  está completamente en  $\alpha$ .
11. Arrastre a  $B$  hasta que quede en la semirrecta opuesta a  $OA$ .
12. Muestre que  $O$  está entre  $A$  y  $B$ .

13. Muestre que  $B$  está en el semiplano opuesto a  $\alpha$  (sugerencia: use el teorema 88).
14. Concluya que la semirrecta opuesta a  $OA$  está completamente en el semiplano opuesto a  $\alpha$ .
15. Concluya la prueba.

**Definición 95.** A un par no ordenado de semirrectas  $h$  y  $k$  del mismo origen  $O$  no colineales lo llamamos *ángulo* y lo denotaremos  $\angle (h, k)$  o  $\widehat{hk}$ .

- A las semirrectas  $h$  y  $k$  las llamamos *lados del ángulo*  $\angle (h, k)$  y a  $O$  *vértice*.
- A los puntos que están del lado de la prolongación de  $h$  donde está  $k$  y del lado de la prolongación de  $k$  donde está  $h$  los llamamos *puntos interiores* de  $\angle (h, k)$ .
- Al conjunto de los puntos interiores de un ángulo lo llamamos *interior del ángulo*.
- A los ángulos  $\angle (h, \sim k)$  y  $\angle (\sim h, k)$  los llamamos *ángulos adyacentes al ángulo*  $\angle (h, k)$ , donde  $\sim h, \sim k$  son las semirrectas opuestas de  $h$  y  $k$ , respectivamente.
- Al ángulo  $\angle (\sim h, \sim k)$  lo llamamos *ángulo opuesto del ángulo*  $\angle (h, k)$ , donde  $\sim h, \sim k$  son respectivamente las semirrectas opuestas de  $h$  y  $k$ , respectivamente.
- Debido a que las semirrectas quedan definidas por su origen y por un punto por donde pasan, podemos determinar un ángulo señalando puntos sobre sus lados y el vértice. Más precisamente, si  $A$  y  $B$  son puntos de  $h$  y  $k$  respectivamente, entonces  $\angle (h, k)$  se puede notar por  $\widehat{AOB}$ . Cuando quede claro por el vértice a qué ángulo nos referimos, notamos  $\widehat{O}$ .

**Proposición 96.** *Un ángulo cualquiera  $\alpha = \angle (h, k)$  determina un plano  $\pi$ , que pasa por  $h$  y  $k$  y por cualquiera de los puntos interiores de  $\alpha$ .*

**Ejercicio 97.** Pruebe la proposición 96 (sugerencia: use el teorema 12)

**Teorema 98.** *Sean tres puntos  $A, B$  y  $C$ , no alineados. Cualquier otro punto del plano determinado por  $A, B$  y  $C$ , que no se encuentre sobre las rectas que unen estos puntos, se encontrará en el interior de algunos de los ángulos:  $\widehat{ABC}$ ,  $\widehat{BCA}$ , o  $\widehat{BAC}$  o en sus opuestos.*

**Ejercicio 99.** Pruebe el teorema 98 siguiendo los pasos a continuación.

1. Dibuje los puntos no alineados  $A, B$  y  $C$  y las rectas  $a = BC$ ,  $b = AC$  y  $c = AB$ .
2. Llame  $\alpha$  al lado de  $a$  que contiene a  $A$  y  $\sim \alpha$  al opuesto;  $\beta$  al lado de  $b$  que contiene a  $B$  y  $\sim \beta$  al opuesto y;  $\gamma$  al lado de  $c$  que contiene a  $C$  y  $\sim \gamma$  al opuesto.
3. Verifique que:

$$\begin{aligned}
 (\alpha \cup \sim \alpha) &= (\beta \cup \sim \beta) = (\gamma \cup \sim \gamma) \\
 &= (\alpha \cup \sim \alpha) \cap (\beta \cup \sim \beta) \cap (\gamma \cup \sim \gamma) \\
 &= (\alpha \cap \beta \cap \gamma) \cup (\alpha \cap \beta \cap \sim \gamma) \cup (\alpha \cap \sim \beta \cap \gamma) \cup \\
 &\hspace{15em} (2.5.1) \\
 &\quad \cup (\alpha \cap \sim \beta \cap \sim \gamma) \cup (\sim \alpha \cap \beta \cap \gamma) \cup \\
 &\quad \cup (\sim \alpha \cap \beta \cap \sim \gamma) \cup (\sim \alpha \cap \sim \beta \cap \gamma) \cup \\
 &\quad \cup (\sim \alpha \cap \sim \beta \cap \sim \gamma)
 \end{aligned}$$

4. Suponga para reducir el problema al absurdo que existe un punto  $D$  que está en  $\sim \alpha \cap \sim \beta \cap \sim \gamma$ . Dibuje a  $D$  en el interior de  $\sim \beta \cap \sim \gamma$ .

- a) Muestre que entre  $A$  y  $D$  debe existir un punto  $E$  que está en la recta  $a$ . (Note que  $A$  está en  $\alpha$ ). Dibuje a  $E$ .
- b) Muestre que la semirrecta opuesta a la  $AD$  corta a  $a$  en un punto  $F$  en el segmento  $BC$ . Dibuje a  $F$ .
- c) Muestre que  $E$  está entre  $D$  y  $F$  (sugerencia: use el teorema de los segmentos encajados 37).
- d) Muestre que  $E$  y  $F$  son distintos.
- e) Muestre que esto conduce a una contradicción.

5. Muestre que

$$\alpha \cap \sim \beta \cap \sim \gamma = \sim \beta \cap \sim \gamma$$

6. Muestre que el último miembro de la ecuación 2.5.1 se reduce a

$$\begin{aligned} &(\alpha \cap \beta \cap \gamma) \cup (\alpha \cap \beta \cap \sim \gamma) \cup (\alpha \cap \sim \beta \cap \gamma) \cup (\sim \beta \cap \sim \gamma) \cup \\ &(\sim \alpha \cap \beta \cap \gamma) \cup (\sim \alpha \cap \sim \gamma) \cup (\sim \alpha \cap \sim \beta) \end{aligned}$$

que es equivalente a

$$\begin{aligned} &[(\alpha \cap \beta \cap \gamma) \cup (\alpha \cap \beta \cap \sim \gamma)] \cup \\ &[(\alpha \cap \beta \cap \gamma) \cup (\alpha \cap \sim \beta \cap \gamma)] \cup \\ &[(\alpha \cap \beta \cap \gamma) \cup (\sim \alpha \cap \beta \cap \gamma)] \cup \\ &(\sim \beta \cap \sim \gamma) \cup (\sim \alpha \cap \sim \gamma) \cup (\sim \alpha \cap \sim \beta) \end{aligned}$$

que a su vez equivale a

$$\begin{aligned} &(\alpha \cap \beta) \cup (\alpha \cap \gamma) \cup (\beta \cap \gamma) \cup \\ &(\sim \beta \cap \sim \gamma) \cup (\sim \alpha \cap \sim \gamma) \cup (\sim \alpha \cap \sim \beta) \end{aligned}$$

7. Concluya la prueba.

**Definición 100.** Si un segmento tiene sus extremos sobre cada lado de un ángulo decimos que se *apoya en el ángulo*. Si una semirrecta tiene origen en el vértice de un ángulo y pasa por un punto interior de este ángulo, le llamamos *semirrecta interior* del ángulo.

**Proposición 101.** *Sea el ángulo  $\angle (h, k)$  y sean los puntos  $A$  y  $B$  sobre  $h$  y  $k$  respectivamente. Los puntos interiores del segmento  $AB$  son puntos interiores del  $\angle (h, k)$ . En otras palabras, los segmentos que se apoyan en un ángulo tienen sus puntos interiores en el interior del ángulo.*

**Ejercicio 102.** Pruebe la proposición 101

1. Dibuje dos semirrectas  $h$  y  $k$  de origen común  $O$ .
2. Marque un punto  $A$  en  $h$  y un punto  $B$  en  $k$  y el segmento  $a = AB$ .
3. Llame  $\alpha$  al semiplano de borde la prolongación de  $h$  que contiene a  $B$  y  $\beta$  el semiplano de borde la prolongación de  $k$  que contiene a  $A$ .
4. Muestre que las semirrectas  $k$  y  $AB$  están en  $\alpha$  y que las semirrectas  $h$  y  $BA$  están en  $\beta$  (sugerencia: use el teorema 91).
5. Muestre que el segmento  $AB$  está en las semirrectas  $AB$  y  $BA$  (sugerencia: use la proposición 58).
6. Concluya la prueba.

**Proposición 103.** *Sea el ángulo  $\angle (h, k)$  y sea el punto  $A$  en el interior de  $\angle (h, k)$ . Los puntos de la semirrecta  $OA$  son puntos interiores del  $\angle (h, k)$  y los puntos interiores de la semirrecta opuesta de la  $OA$  son puntos interiores del ángulo opuesto al  $\angle (h, k)$ . En otras palabras, las semirrectas interiores de un ángulo tienen sus puntos interiores en el interior del ángulo, y las semirrectas opuestas a las interiores de un ángulo están en el interior del ángulo opuesto.*

**Ejercicio 104.** Pruebe la proposición 103

1. Dibuje dos semirrectas  $h$  y  $k$  de origen común  $O$ .
2. Marque un punto  $A$  en el interior de  $\angle (h, k)$  y la semirrecta  $a = OA$ .

3. Llame  $\alpha$  el semiplano de borde la prolongación de  $h$  que contiene a  $A$  y  $\beta$  el semiplano de borde la prolongación de  $k$  que contiene a  $A$ .
4. Muestre que las semirrectas  $k$  y  $OA$  están en  $\alpha$  y que las semirrectas  $h$  y  $OA$  están en  $\beta$  (sugerencia: use el teorema 91).
5. Muestre que la semirrecta  $OA$  está en el interior de  $\sphericalangle (h, k)$ .
6. Muestre que las semirrectas  $\sim k$  y la opuesta de  $OA$  están en  $\sim \alpha$  y que las semirrectas  $\sim h$  y la opuesta de  $OA$  están en  $\sim \beta$ , donde  $\sim h$  y  $\sim k$  son las semirrectas opuestas de  $h$  y  $k$  respectivamente, y  $\sim \alpha$  y  $\sim \beta$  son los semiplanos opuestos de  $\alpha$  y  $\beta$  respectivamente (sugerencia: use el teorema 91).
7. Muestre que la semirrecta opuesta de  $OA$  está en el interior de  $\sphericalangle (\sim h, \sim k)$ .
8. Concluya la prueba.

**Corolario 105.** *Sea un ángulo  $\sphericalangle (h, k)$  de origen  $O$  y un segmento  $a = AB$  que se apoya en el ángulo. Si una semirrecta de origen  $O$  corta a  $a$ , entonces es interior al ángulo  $\sphericalangle (h, k)$ .*

**Ejercicio 106.** Pruebe el corolario 105 siguiendo los pasos a continuación.

1. Dibuje un segmento  $a = AB$  y un punto  $O$  que no esté en la prolongación de  $a$ .
2. Trace las semirrectas  $h = OA$  y  $k = OB$ .
3. Marque un punto  $C$  en  $AB$ .
4. Muestre que  $C$  es interior de  $\sphericalangle (h, k)$ .
5. Muestre que la semirrecta  $b = OC$  es interior.
6. Concluya la prueba.

**Corolario 107.** *Toda semirrecta interior y todo segmento que se apoya en un ángulo  $\alpha$  están en el plano determinado por  $\alpha$ .*

**Ejercicio 108.** Pruebe el corolario 107 (sugerencia: use el teorema 12 y las proposiciones 101 y 103).

**Teorema 109.** *Toda semirrecta interior a un ángulo corta a cualquier segmento que se apoya en el ángulo.*

**Ejercicio 110.** Pruebe el teorema 109 siguiendo los pasos a continuación.

1. Dibuje los puntos  $A$ ,  $B$  y  $O$  no alineados.
2. Trace las rectas  $a = AO$  y  $b = BO$ .
3. Trace el segmento  $AB$ .
4. Marque un punto  $C$  en el interior de  $\widehat{AOB}$ .
5. Trace la recta  $c = OC$ .
6. Marque un punto  $A'$  tal que  $O$  esté entre  $A$  y  $A'$ .
7. Muestre que los puntos  $A$ ,  $B$  y  $A'$  no están alineados.
8. Muestre que  $c$  no pasa por puntos interiores de  $\widehat{A'OB}$  (sugerencia: estudie a  $c$  en sus semirrectas componentes y use la proposición 103).
9. Muestre que los puntos interiores del segmento  $A'B$  están en el interior del  $\widehat{A'OB}$  (sugerencia: use la proposición 101).
10. Aplique el axioma de Pasch a los puntos  $A$ ,  $B$  y  $A'$  y a  $c$  para mostrar que  $c$  debe cortar a  $AB$ .
11. Concluya la prueba.

**Definición 111.** Dadas las semirrectas  $a$ ,  $b$  y  $c$ , decimos que  $b$  está entre  $a$  y  $c$  si  $a$  y  $c$  tienen el mismo origen pero no son colineales, y  $b$  es una semirrecta interior del ángulo  $\angle (a, c)$ .

**Lema 112.** (*Lema de las semirrectas encajadas*) Si una semirrecta  $c$  está entre las semirrectas  $a$  y  $d$ , y una semirrecta  $b$  entre las semirrectas  $a$  y  $c$ , entonces  $b$  se encuentra asimismo entre  $a$  y  $d$ , y  $c$  entre  $b$  y  $d$ .

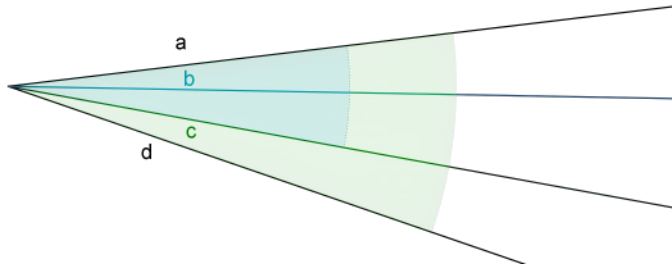


Figura 2.5.1: Semirrectas encajadas

**Ejercicio 113.** Pruebe el lema 112 siguiendo los pasos a continuación.

1. Dibuje las semirrectas  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$  de origen común  $O$  de modo que  $c$  esté entre  $a$  y  $d$ , y  $b$  entre  $a$  y  $c$ .
2. Trace el segmento  $e = AD$  con  $A$  y  $D$  sobre  $a$  y  $d$  respectivamente.
3. Use el teorema 109 para demostrar que existe un punto  $C$  de corte de  $c$  y  $e$ . Dibuje a  $C$ .
4. Use el teorema 109 para demostrar que existe un punto  $B$  de corte de  $b$  y  $e$ . Dibuje a  $B$ .
5. Use el teorema 37 para demostrar que  $B$  está entre  $A$  y  $D$ .
6. Pruebe que  $b$  está entre  $a$  y  $d$ .
7. Concluya la prueba.

**Corolario 114.** Sean cuatro puntos no alineados tres a tres  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $P$ . Entonces, la recta determinada por  $P$  y alguno de los puntos  $A$ ,  $B$  o  $C$  cortará alguno de los segmentos  $BC$ ,  $AC$  o  $AB$ .

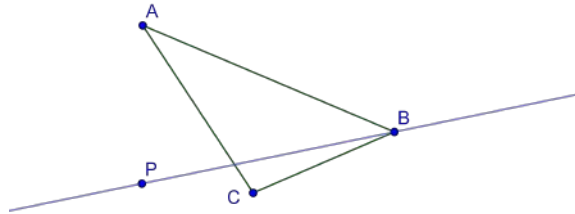


Figura 2.5.2: Recta determinada por dos de cuatro puntos no alineados corta al segmento determinado por los otros dos.

**Ejercicio 115.** Pruebe el corolario 114 siguiendo los pasos a continuación.

1. Dibuje los puntos no alineados tres a tres  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $P$ .
2. Muestre que  $P$  se encuentra en el interior de algunos de los ángulos  $\widehat{ABC}$ ,  $\widehat{BCA}$ , o  $\widehat{BAC}$  o en sus opuestos (sugerencia: vea el teorema 98).
3. Suponga que  $P$  se encuentra en el interior del ángulo  $\widehat{ABC}$ . Arrastre el punto  $P$  hasta que se ilustre este caso.
  - a) Dibuje la semirrecta  $a = BP$ .
  - b) Muestre que  $a$  corta al segmento  $AC$ .
  - c) Concluya para este caso el teorema.
4. Suponga que  $P$  se encuentra en el interior del ángulo opuesto del  $\widehat{ABC}$ . Arrastre el punto  $P$  hasta que se ilustre este caso.
  - a) Dibuje la semirrecta opuesta  $b$  de  $a$ .
  - b) Note que  $b$  está en el ángulo  $\widehat{ABC}$ .
  - c) Muestre que  $b$  corta al segmento  $AC$ .
  - d) Concluya para este caso el teorema.

5. Considere los casos restantes para las posiciones de  $P$ .
6. Concluya la prueba.

**Proposición 116.** *La relación **estar entre** definida para las semirrectas interiores de un ángulo  $\alpha$  cumple las siguientes propiedades:*

1. Sean  $a$ ,  $b$  y  $c$  semirrectas, si  $b$  se encuentra entre la  $a$  y  $c$ , entonces  $a$ ,  $b$  y  $c$  son coplanares y distintas, y  $b$  se encuentra, asimismo, entre  $c$  y  $a$ .
2. Cualesquiera que sean las semirrectas del mismo origen no colineales  $a$  y  $c$ , existe al menos una semirrecta  $b$  sobre el plano determinado por el ángulo  $\angle (a, c)$  tal que  $c$  está entre  $a$  y  $b$ .
3. Entre tres semirrectas del mismo origen no colineales, a lo sumo una de ellas puede encontrarse entre los otros dos.

**Ejercicio 117.** Pruebe la proposición 116 siguiendo los pasos a continuación.

1. Muestre que si  $b$  se encuentra entre la  $a$  y  $c$ , entonces  $a$ ,  $b$  y  $c$  son coplanares y distintas, y  $b$  se encuentra, asimismo, entre  $c$  y  $a$  (sugerencia: use el corolario 107).
2. Dibuje dos semirrectas del mismo origen  $O$  no colineales  $a$  y  $c$ .
3. Marque dos puntos  $A$  y  $C$  sobre  $a$  y  $c$  respectivamente.
4. Muestre que  $A$  y  $C$  son distintos.
5. Trace la recta  $r = AC$ .
6. Muestre que existe en  $r$  un punto  $B$  tal que  $C$  está entre  $A$  y  $B$ . Dibuje a  $B$ .
7. Dibuje a la semirrecta  $b = OB$ .
8. Muestre que el segmento  $AB$  se apoya en  $\angle (a, b)$ .

## 2.5. SEPARACIÓN EN EL PLANO

---

9. Muestre que  $C$  es interior de  $\angle (a, b)$ .
10. Muestre que  $c$  es semirrecta interior de  $\angle (a, b)$ .
11. Muestre que, cualesquiera que sean las semirrectas del mismo origen no colineales  $a$  y  $c$ , existe al menos una semirrecta  $b$  sobre el plano determinado por el ángulo  $\angle (a, c)$  tal que  $c$  está entre  $a$  y  $b$ .
12. Dibuje tres semirrectas  $a$ ,  $b$  y  $c$  de tal modo que  $b$  sea interior a  $\angle (a, c)$ .
13. Dibuje dos puntos  $A$  y  $C$  en las semirrectas  $a$  y  $c$ .
14. Pruebe que existe un punto  $B$  de corte del segmento  $AC$  con la semirrecta  $b$ . Dibuje a  $B$ .
15. Pruebe que  $A$ ,  $B$  y  $C$  son distintos.
16. Suponga para reducir el problema al absurdo que  $a$  está entre  $b$  y  $c$ .
  - a) Pruebe que existe solamente un corte de la semirrecta  $a$  con la recta  $AB$  y que ese corte debe ser  $A$ .
  - b) Pruebe que el segmento  $BC$  y  $a$  se cortan.
  - c) Muestre que esto contradice el axioma II 3.
17. Concluya la prueba.

**Proposición 118.** Sean  $h$  y  $h'$  semirrectas opuestas de origen  $O$  y sean  $a$  y  $b$  semirrectas de origen  $O$  que están del mismo lado con respecto a la prolongación de  $h$ . Entonces solamente son posibles los siguientes tres casos excluyentes:

1.  $a = b$ .
2.  $b$  es interior del ángulo  $\angle (a, h)$  y  $a$  es interior del ángulo  $\angle (b, h')$ .

3.  $a$  es interior del ángulo  $\angle (b, h)$  y  $b$  es interior del ángulo  $\angle (a, h')$ .

**Ejercicio 119.** Pruebe la proposición 118 siguiendo los pasos a continuación.

1. Dibuje una recta  $r = OA$ .
2. Marque un punto  $B$  en  $r$  tal que  $O$  esté entre  $A$  y  $B$ .
3. Trace una semirrecta  $a = OC$ .
4. Trace los segmentos  $s = AC$  y  $t = BC$ .
5. Marque un punto  $D$  del mismo lado que  $C$  con respecto a  $r$ .
6. Dibuje una semirrecta  $b = OD$  distinta de  $a$ .
7. Muestre que la prolongación de la semirrecta  $b$  debe cortar al segmento  $s$  o al segmento  $t$ .
8. Muestre que  $a$ ,  $b$ ,  $s$  y  $t$  están a un mismo lado de  $r$ .
9. Muestre que la semirrecta  $b$  debe cortar al segmento  $s$  o al segmento  $t$ .
10. Trace las semirrectas  $h = OA$  y  $h' = OB$ .
11. Suponga que  $b$  corta a  $s$  en un punto  $E$ . Trace a  $E$ .
  - a) Muestre que  $E$  es interior del ángulo  $\angle (a, h)$ .
  - b) Pruebe que  $b$  es una semirrecta interior del ángulo  $\angle (a, h)$ .
  - c) Trace el segmento  $c = EA$ .
  - d) Aplique el teorema 27 a los puntos  $A$ ,  $E$ ,  $B$  y  $C$ , para demostrar que debe existir un punto  $F$  entre  $E$  y  $B$ . Dibuje a  $F$ .
  - e) Muestre que  $F$  es interior del ángulo  $\angle (a, h')$ .
  - f) Concluya la prueba en este caso.

12. Arrastre a  $b$  hasta que corte al segmento  $t$  en un punto  $G$ . Trace a  $G$ .
- Muestre que  $G$  es interior del ángulo  $\angle (a, h')$ .
  - Pruebe que  $b$  es una semirrecta interior del ángulo  $\angle (a, h')$ .
  - Trace el segmento  $d = GA$ .
  - Aplique el teorema 27 a los puntos  $B, G, A$  y  $C$ , para demostrar que debe existir un punto  $H$  entre  $G$  y  $A$ . Dibuje a  $H$ .
  - Muestre que  $H$  es interior del ángulo  $\angle (b, k)$ .
  - Pruebe que  $a$  es una semirrecta interior del ángulo  $\angle (b, h)$ .
  - Concluya la prueba en este caso.
13. Concluya la prueba.

**Teorema 120.** *Dado un ángulo  $\alpha$  y un segmento  $a$  que se apoya en  $\alpha$ , existe una función biyectiva  $\nu$  con dominio el conjunto de las semirrectas interiores de  $\alpha$ , y codominio el conjunto de los puntos interiores de  $a$ , tal que dadas tres semirrectas  $h, k$  y  $l$  interiores a  $\alpha$ ,  $k$  está entre  $h$  y  $l$ , si y sólo si  $\nu(k)$  está entre  $\nu(h)$  y  $\nu(l)$ .*

**Ejercicio 121.** Pruebe el teorema 120 siguiendo los pasos a continuación.

- Dibuje tres puntos no alineados  $A, O$  y  $B$ .
- Trace las semirrectas  $a = OA, b = OB$  y dos semirrectas interiores a  $\angle (a, b)$   $c = OC$  y  $d = OD$ , con  $c$  entre  $a$  y  $d$ .
- Trace la recta  $e = AB$ .
- Oculte  $C$  y  $D$ .
- Marque el corte  $C$  de  $c$  con  $e$  y el corte  $D$  de  $d$  con  $e$ .
- Muestre que  $C$  está entre  $A$  y  $D$ .

7. Defina la relación  $\nu$  entre las semirrectas interiores del ángulo  $\widehat{AOB}$  y los puntos interiores del segmento  $AB$  de la forma siguiente: una semirrecta  $x$  interior del ángulo  $\widehat{AOB}$  está relacionada con un punto interior  $Y$  del segmento  $AB$  si y sólo si  $Y$  está en  $x$ .
8. Muestre que  $\nu$  tiene comportamiento funcional, es decir, a cada semirrecta interior  $x$  del ángulo  $\widehat{AOB}$  le corresponde un único punto  $Y$  de  $AB$  (sugerencia: use el teorema 109 para probar la existencia y el axioma I 2 para probar la unicidad).
9. Muestre que  $\nu$  es inyectiva, es decir, que si  $\nu(x_1) = \nu(x_2)$  tiene que ser porque  $x_1 = x_2$ , con  $x_1$  y  $x_2$  semirrectas interiores a  $\widehat{AOB}$  (sugerencia: use el axioma I 2).
10. Muestre que  $\nu$  es sobreyectiva, es decir, para cualquier punto  $Y$  interior de  $AB$ , existe una semirrecta  $x$  interior a  $\widehat{AOB}$ , tal que  $\nu(x) = Y$  (sugerencia: use el axioma I 1).
11. Concluya que  $\nu$  es biyectiva.
12. Dibuje las semirrectas  $h, k$ , y  $l$  interiores a  $\widehat{AOB}$ , tal que  $k$  está entre  $h$  y  $l$ .
13. Sean  $H = \nu(h)$ ,  $K = \nu(k)$ ,  $L = \nu(l)$ . Dibuje a  $H, K$  y  $L$ .
14. Pruebe que  $K$  está entre  $H$  y  $L$  (sugerencia: use el teorema 109)
15. Concluya con la condición necesaria de la última afirmación del teorema.
16. Borre a  $h, k$  y  $l$ .
17. Marque tres puntos  $H, K$  y  $L$  en el segmento  $AB$ , tal que  $K$  está entre  $H$  y  $L$ .
18. Sean  $h, k$  y  $l$  tales que  $H = \nu(h)$ ,  $K = \nu(k)$ ,  $L = \nu(l)$ . Verifique la existencia de  $h, k$  y  $l$ . Dibuje a  $h, k$  y  $l$ .

19. Muestre que el segmento  $HL$  se apoya en el ángulo  $\angle (h, l)$ .
20. Muestre que  $K$  es un punto interior al ángulo  $\angle (h, l)$ .
21. Muestre que  $k$  es una semirrecta interior al ángulo  $\angle (h, l)$ .
22. Concluya con la condición suficiente.
23. Concluya la prueba.

**Corolario 122.** *Sea el ángulo  $\angle (a, b)$  y sean los puntos  $A$  y  $A'$  sobre  $a$  y  $B$  y  $B'$  sobre  $b$ . Existe una biyección  $\pi$  entre los puntos interiores de los segmentos  $AB$  y  $A'B'$  que preserva la relación **estar entre** de segmentos. Si  $P$  y  $Q$  son puntos en el segmento  $AB$  tales que  $P <_{AB} Q$ , entonces  $\pi(P) <_{A'B'} \pi(Q)$ .*

**Ejercicio 123.** Pruebe el corolario 122 siguiendo los pasos a continuación.

1. Dibuje la situación del corolario.
2. Dibuje tres puntos  $H, K, L$  sobre el segmento  $AB$ , tal que  $K$  esté entre  $H$  y  $L$ .
3. Considere  $\nu_1$  y  $\nu_2$  dos biyecciones del tipo consideradas en el teorema 120 entre las semirrectas interiores de  $\angle (a, b)$  y los puntos interiores de  $AB$  y  $A'B'$  respectivamente.
4. Pruebe que existen únicas semirrectas interiores de  $\angle (a, b)$ ,  $h = \nu_1^{-1}(H)$ ,  $k = \nu_1^{-1}(K)$ ,  $l = \nu_1^{-1}(L)$ . Dibuje a  $h, k$  y  $l$ .
5. Pruebe que  $k$  está entre  $h$  y  $l$ .
6. Pruebe que existen únicos puntos interiores de  $A'B'$ ,  $H' = \nu_2(h)$ ,  $K' = \nu_2(k)$ ,  $L' = \nu_2(l)$ . Dibuje a  $H', K'$  y  $L'$ .
7. Pruebe que  $K'$  está entre  $H'$  y  $L'$ .
8. Pruebe que  $\pi = \nu_2 \circ \nu_1^{-1}$  es una biyección que preserva la relación estar entre.

9. Suponga que  $P <_{AB} Q$ . Dibuje a  $P$  y a  $Q$ .
10. Muestre que  $P$  está entre  $A$  y  $Q$ .
11. Dibuje las semirrectas  $p = OP$  y  $q = OQ$ .
12. Verifique que  $\nu_1^{-1}(P) = p$  y  $\nu_1^{-1}(Q) = q$ .
13. Muestre que la semirrecta  $p$  es interior del ángulo  $\angle (a, q)$ .
14. Dibuje a  $P' = \nu_2(p)$  y  $Q' = \nu_2(q)$ .
15. Muestre que  $P'$  está entre  $A'$  y  $Q'$ .
16. Muestre que  $P' <_{A'B'} Q'$ .
17. Concluya la prueba.

**Corolario 124.** *Sean tres semirrectas coplanares  $a$ ,  $b$  y  $c$  del mismo origen  $O$  al mismo lado de una recta  $r$  que pasa por  $O$ , tal que  $b$  está entre  $a$  y  $c$ . Cualquier semirrecta  $h$  de origen  $O$  del mismo lado de  $r$  que las anteriores cumple una y sólo una de las siguientes condiciones:*

1.  $c$  entre  $a$  y  $h$ ,  $c$  entre  $b$  y  $h$  y  $b$  entre  $a$  y  $h$ .
2.  $c = h$  y  $b$  entre  $a$  y  $h$ .
3.  $h$  entre  $b$  y  $c$ ,  $h$  entre  $a$  y  $c$  y  $b$  entre  $a$  y  $h$ .
4.  $h = b$  y  $h$  entre  $a$  y  $c$ .
5.  $h$  entre  $a$  y  $b$ ,  $h$  entre  $a$  y  $c$  y  $b$  entre  $h$  y  $c$ .
6.  $h = a$  y  $b$  entre  $h$  y  $c$ .
7.  $a$  entre  $h$  y  $c$ ,  $a$  entre  $h$  y  $b$  y  $b$  entre  $h$  y  $c$ .

**Ejercicio 125.** Pruebe el corolario 124 (sugerencia: use el teorema 120 y el corolario 48).

## 2.6. Orden de semirrectas

### 2.6.1. Orden de semirrectas interiores de un ángulo

**Definición 126.** Sea el ángulo  $\alpha = \sphericalangle (h, k)$ , definimos el *orden  $hk$*  (que denotaremos  $<_{hk}$ ) sobre las semirrectas interiores del ángulo  $\alpha$  de la siguiente manera: Sean  $H$  y  $K$  puntos cualesquiera en los lados  $h$  y  $k$  respectivamente, y sea  $\nu$  una biyección entre las semirrectas interiores de  $\alpha$  y los puntos del segmento  $HK$ , como en el teorema 120 Si  $a$  y  $b$  son semirrectas interiores de  $\alpha$ , entonces  $a <_{hk} b$  si y solo si  $\nu(a) <_{HK} \nu(b)$ .

**Teorema 127.** *Sea el ángulo  $\alpha = \sphericalangle (h, k)$ . El orden  $hk$  es un orden lineal, denso y abierto. Además es único, es decir, el orden  $hk$  no depende de la elección de los puntos que se tomen sobre los lados del ángulo.*

**Ejercicio 128.** Pruebe el teorema 127 siguiendo los pasos a continuación.

1. Pruebe la transitividad de este orden (sugerencia: Suponga tres semirrectas  $a$ ,  $b$ , y  $c$  interiores a  $\alpha$  tal que

$$a <_{hk} b \text{ y } b <_{hk} c$$

es decir que

$$\nu(a) <_{HK} \nu(b) \text{ y } \nu(b) <_{HK} \nu(c)$$

lo que implica que

$$\nu(a) <_{HK} \nu(c)$$

que significa que  $a <_{hk} c$ .

2. Use la definición de orden  $hk$  para mostrar que es un orden lineal, que es denso y abierto.

3. Para mostrar que el orden definido no depende de la elección de los puntos que se tomen sobre las semirrectas que son los lados del ángulo, reduzca el problema al absurdo, es decir, suponga que para dos semirrectas interiores de  $\alpha$ , y para puntos  $H$  y  $H'$  en  $h$  y  $K$  y  $K'$  en  $k$  se cumple que  $\nu(a) <_{HK} \nu(b)$  y  $\nu(b) <_{H'K'} \nu(a)$ .
  - a) Muestre que esto último está en contradicción con el corolario 122.
4. Concluya la prueba.

### 2.6.2. Orden en un haz de semirrectas

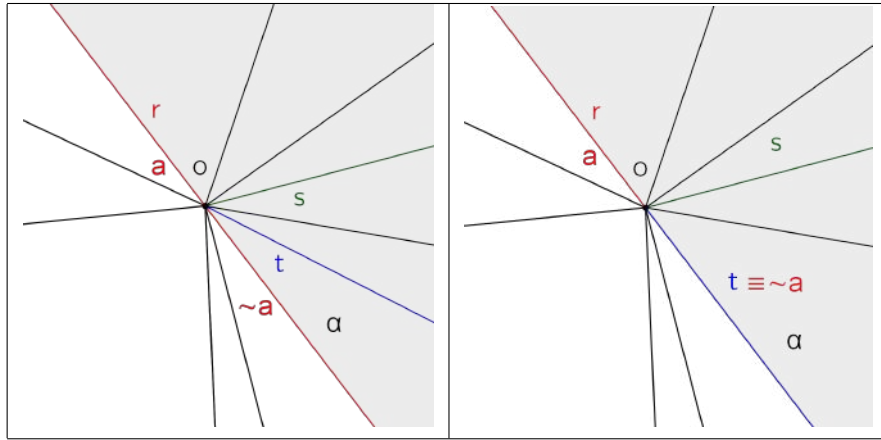
**Definición 129.** Un *haz de semirrectas* es un conjunto de semirrectas con origen común.

En lo subsiguiente entendemos que cuando nos referimos a un haz consideramos a todas las semirrectas contenidas en un plano y con origen común.

**Definición 130.** Sea  $O$  el origen común de las semirrectas de un haz  $\mathcal{H}$ , sea  $a$  una de las semirrectas de  $\mathcal{H}$ . Definimos *orden* en el conjunto  $\mathcal{H} - \{a\}$  de semirrectas de la forma siguiente: sea  $r$  la prolongación de  $a$  y  $\alpha$  uno de los semiplanos del plano determinado por  $\mathcal{H}$  de borde  $r$  al que llamamos *superior* y al opuesto *inferior*. Sean  $s$  y  $t$  dos semirrectas de  $\mathcal{H}$  distintas de  $a$ , y  $\sim a$  la semirrecta opuesta de  $a$ . Definimos  $s < t$  si:

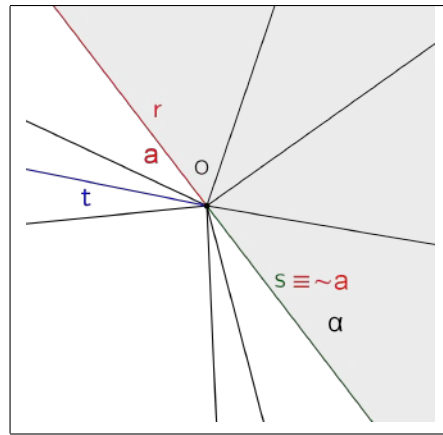
- Caso 1.*  $s$  y  $t$  están en el semiplano superior y  $s$  es interior a  $\widehat{ta}$ .
- Caso 2.*  $s$  está en el semiplano superior y  $t$  es  $\sim a$ .
- Caso 3.*  $t$  está en el semiplano inferior y  $s$  es  $\sim a$ .
- Caso 4.*  $s$  está en el semiplano superior y  $t$  en el inferior.
- Caso 5.*  $s$  y  $t$  están en el semiplano inferior y  $t$  es interior a  $\widehat{sa}$ .

2.6. ORDEN DE SEMIRRECTAS

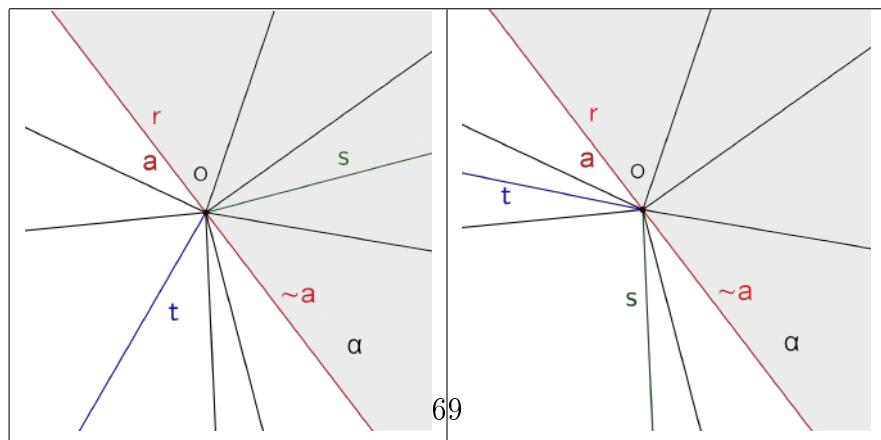


Caso 1

Caso 2



Caso 3



Caso 4

Caso 5

Figura 2.6.1: Orden en un haz de semirrectas:  $s < t$

**Teorema 131.** *Dado un haz  $\mathcal{H}$  y una semirrecta  $a$  de  $\mathcal{H}$ , las semirrectas restantes de  $\mathcal{H}$  pueden ordenarse con dos órdenes opuestos lineales que son densos y abiertos.*

**Ejercicio 132.** Demuestre el teorema 131.

# Capítulo 3

## Congruencia

Trataremos con un predicado que relaciona segmentos  $AB$  y  $CD$ . Decimos que *un segmento  $AB$  es congruente al segmento  $CD$*  o en forma abreviada  $AB \equiv CD$  para referirnos a este predicado. También trataremos con un predicado que relaciona ángulos  $\angle (h, k)$  y  $\angle (h', k')$ . Decimos que *un ángulo  $\angle (h, k)$  es congruente al ángulo  $\angle (h', k')$*  para referirnos a este predicado.

### 3.1. Axiomas de congruencia

III 1 Si  $A$  y  $B$  son dos puntos sobre la recta  $a$ , y  $A'$  es un punto de la misma recta, o bien de otra recta  $a'$ , siempre podemos encontrar, a un lado prefijado de  $A'$  sobre la recta  $a'$ , un punto  $B'$ , y sólo uno, tal que el segmento  $AB$  es congruente al  $A'B'$ . Para cada segmento  $AB$  exigimos la congruencia:

$$AB \equiv BA$$

III 2 Si los segmentos  $A'B'$  y  $A''B''$  son congruentes al mismo segmento  $AB$ , entonces  $A'B'$  es congruente al segmento  $A''B''$ , es decir, si

$$A'B' \equiv AB \text{ y } A''B'' \equiv AB$$

entonces también

$$A'B' \equiv A''B''$$

- III 3 Sean  $AB$  y  $BC$  dos segmentos sobre la recta  $a$ , sin puntos interiores comunes y sean, además,  $A'B'$  y  $B'C'$  dos segmentos sobre la misma recta, o bien sobre otra  $a'$  que tampoco poseen puntos interiores comunes. Si

$$AB \equiv A'B' \text{ y } BC \equiv B'C',$$

entonces

$$AC \equiv A'C'$$

- III 4 Sean dados  $\angle (h, k)$  en el plano  $\alpha$ , una recta  $a'$  en este mismo plano o bien en otro  $\alpha'$  y supongamos fijado un lado determinado del plano  $\alpha'$  con respecto a la recta  $a'$ .  
 Sea  $h'$  una semirrecta de la recta  $a'$  con origen en el punto  $O'$ . Entonces en el plano  $\alpha'$  existe una semirrecta  $k'$ , y solo una, tal que  $\angle (h, k)$  es congruente con  $\angle (h', k')$  y, además, todos los puntos interiores de  $\angle (h', k')$  se encuentran en el lado prefijado con respecto a  $a'$ .  
 Si  $\angle (h, k) \equiv \angle (h', k')$ , entonces  $\angle (k, h) \equiv \angle (k', h')$ . Cada ángulo es congruente consigo mismo, es decir:

$$\angle (h, k) \equiv \angle (h, k) \text{ y } \angle (h, k) \equiv \angle (k, h)$$

- III 5 Sean  $A, B, C$  tres puntos no pertenecientes a una misma recta y  $A', B', C'$  otros tres, tampoco pertenecientes a una misma recta. Si

$$AB \equiv A'B', \quad AC \equiv A'C' \text{ y } \widehat{BAC} \equiv \widehat{B'A'C'}$$

entonces

$$\widehat{ABC} \equiv \widehat{A'B'C'} \text{ y } \widehat{ACB} \equiv \widehat{A'C'B'}$$

## 3.2. Resultados de la congruencia, el orden y la incidencia

**Ejercicio 133. (Construcción de la herramienta Transporte de segmentos).** Construya una herramienta que reciba de entrada los puntos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  y de salida un punto  $E$  que esté sobre la semirrecta  $CD$  y que  $AB \equiv CE$ . Siga los pasos a continuación.

1. En una hoja de GeoGebra dibuje 4 puntos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$ .
2. Trace la semirrecta  $a = CD$ .
3. Con la herramienta compás trace una circunferencia  $c$  de radio congruente al segmento  $AB$ , y centro  $C$ .
4. Marque el corte  $E$  de  $a$  y  $c$ .
5. En el menú “Herramientas” elija la opción “Crear una nueva herramienta”.
  - a) En la solapa “Objetos de salida”, elija “punto  $E$ ”.
  - b) En la solapa “Objetos de entrada”, elija los puntos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$ .
  - c) En la solapa “Nombre e Ícono”, en el box “Nombre de la Herramienta”, escriba *Transporte de segmentos*. Se rellena solo el “Nombre de Comando”.
  - d) En “Ayuda de la herramienta”, escriba *Extremos del segmento y origen de la semirrecta y un punto por donde pasa*.
  - e) En el botón “Ícono” coloque un archivo del tipo imagen.
  - f) Al presionar el botón “Concluido” GeoGebra debe decirle “Nueva herramienta creada correctamente”.
6. Vuelva al menú Herramientas, seleccione “Gestión de herramientas”.

- a) Seleccione la opción “Transporte de Segmentos”.
  - b) Presione el botón “Guardar como...”.
  - c) Llámelo “TransporteSegmento” (GeoGebra agregará la extensión .ggt.).
7. Cierre el GeoGebra y vuélvalo a abrir.
  8. En el menú Archivo seleccione la opción “Abrir”.
  9. Si las cosas salieron bien podrá encontrar el archivo TransporteSegmento.ggt. Ábralo.
  10. Haga unas pruebas con cuatro puntos cualquiera.
  11. En el menú “Opciones” elija “Guardar la configuración”. De este modo, la herramienta aparecerá por defecto cada vez que abra el GeoGebra.

**Lema 134.** *Si  $AB \equiv A'B'$ , entonces  $AB \equiv B'A'$ .*

**Ejercicio 135.** Pruebe el lema 134 justificando los pasos a continuación.

1.  $B'A' \equiv A'B'$ .
2.  $AB \equiv A'B'$ .
3.  $AB \equiv A'B'$  y  $B'A' \equiv A'B'$  implica que  $AB \equiv B'A'$ .
4.  $AB \equiv B'A'$ .

**Teorema 136.** *La relación de congruencia entre segmentos es de equivalencia.*

**Ejercicio 137.** Pruebe el teorema 136 justificando los siguientes pasos:

1. Reflexividad (sugerencia: use el lema 134 con  $A' = B$  y  $B' = A$ ).

### 3.2. CONGRUENCIA, ORDEN E INCIDENCIA

---

2. Simetría (sugerencia: use el axioma III 2 y la reflexividad).
3. Transitividad (sugerencia: use el axioma III 2 y la simetría).
4. Concluya la prueba.

**Teorema 138.** Sean tres puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$  sobre una recta  $a$  y sean tres puntos  $A'$ ,  $B'$  y  $C'$  sobre una recta  $a'$ . Supongamos que  $AB \equiv A'B'$  y  $AC \equiv A'C'$ . Si  $B$  está entre  $A$  y  $C$ , y  $B'$  y  $C'$  están del mismo lado con respecto a  $A'$ , entonces  $B'$  está entre  $A'$  y  $C'$ . Además  $BC \equiv B'C'$ .

**Ejercicio 139.** Pruebe el teorema 138 siguiendo los pasos a continuación.

1. Dibuje las rectas  $a = AB$  y la recta  $a' = A'B'$ .
2. Suponga para reducir el problema al absurdo que existe un punto  $C$  de tal modo que  $B$  esté entre  $A$  y  $C$ , y  $B'$  no está entre  $A'$  y  $C'$  (con  $B'$  y  $C'$  sobre  $a'$  del mismo lado  $A'$ ), aunque  $AB \equiv A'B'$  y  $AC \equiv A'C'$ . Dibuje los puntos  $C$  y  $C'$ .
  - a) Pruebe que existe un único punto  $C''$  en la semirrecta opuesta a la  $B'A'$  tal que  $BC \equiv B'C''$ . Dibuje a  $C''$ .
  - b) Pruebe que  $AC \equiv A'C''$ .
  - c) Pruebe que  $A'C'' \equiv A'C'$ .
  - d) Pruebe que  $C'' = C'$ .
  - e) Muestre que esto es un absurdo.
3. Concluya con la prueba.

**Definición 140.** Supongamos que sobre la recta  $a$  se ha fijado un sistema de puntos  $A_0, A_1, \dots, A_{n-1}, A_n$  y sobre  $a'$ , el sistema  $A'_0, A'_1, \dots, A'_{n-1}, A'_n$ . Si para cada  $i \neq j$ ,  $0 \leq i, j \leq n$ , los segmentos  $A_i A_j$  y  $A'_i A'_j$  son congruentes, ambos sistemas se dicen *congruentes*.

**Proposición 141.** Si los sistemas  $A, B, C$  y  $A', B', C'$  son congruentes y  $B$  está entre  $A$  y  $C$ , entonces  $B'$  está entre  $A'$  y  $C'$ .

**Ejercicio 142.** Pruebe la proposición 141 (sugerencia: pruebe primeramente que solamente pueden darse los casos:  $B'$  y  $C'$  están del mismo lado de  $A'$  o  $A'$  y  $B'$  del mismo lado que  $C'$  y use el teorema 138).

**Teorema 143.** Si en dos sistemas congruentes  $A_0, A_1, \dots, A_{n-1}, A_n$  y  $A'_0, A'_1, \dots, A'_{n-1}, A'_n$  el punto  $A_i$ ,  $0 < i < n$ , deja a  $A_0, \dots, A_{i-1}$  de un lado y a  $A_{i+1}, \dots, A_n$  del otro, entonces  $A'_i$  ( $0 < i < n$ ) deja a  $A'_0, \dots, A'_{i-1}$  de un lado y a  $A'_{i+1}, \dots, A'_n$  del otro.

**Ejercicio 144.** Pruebe el teorema 143 (sugerencia: pruebe por inducción. Note que para  $n = 2$  la prueba es consecuencia de la proposición 141. Para probar el paso inductivo basta mostrar que  $A'_{n+1}$  está del lado contrario de  $A'_0$  con respecto a  $A'_j$  ( $0 < j < n$ )).

### 3.3. Congruencia de triángulos

**Definición 145.** Definimos *triángulo* como una terna no ordenada de tres puntos  $A, B$  y  $C$  que no están alineados. Lo denotamos por  $ABC$ . A los puntos  $A, B$  y  $C$  los llamamos *vértices* del triángulo y a los segmentos que unen pares de vértices, *lados* del triángulo. Los ángulos  $\widehat{ABC}$ ,  $\widehat{BCA}$  y  $\widehat{CAB}$  son los *ángulos interiores* del triángulo. Los ángulos adyacentes a los ángulos interiores de un triángulo son los *ángulos exteriores* del triángulo. A los puntos que están en el interior de los tres ángulos interiores del triángulo los llamamos *interiores* del triángulo.

**Definición 146.** El triángulo  $ABC$  se dice *congruente* al  $A'B'C'$  si

$$AB \equiv A'B', AC \equiv A'C', BC \equiv B'C', \\ \widehat{A} \equiv \widehat{A'}, \widehat{B} \equiv \widehat{B'} \text{ y } \widehat{C} \equiv \widehat{C'}$$

y se denota  $ABC \equiv A'B'C'$ .

### 3.3. CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS

---

**Teorema 147. (Criterio LAL)** Si en dos triángulos  $ABC$  y  $A'B'C'$  tienen lugar las congruencias

$$AB \equiv A'B', \quad AC \equiv A'C' \quad \text{y} \quad \widehat{A} \equiv \widehat{A}'$$

entonces  $ABC \equiv A'B'C'$ .

**Ejercicio 148.** Pruebe el teorema 147 siguiendo los pasos a continuación.

1. Dibuje el triángulo  $ABC$ .
2. Trace la semirrecta  $a = A'D$ , con  $D$  un punto cualquiera del plano.
3. Transporte el segmento  $AB$  sobre  $a$ , con la herramienta creada *Transporte de Segmentos*. Al punto creado llámelo  $B'$ .
4. Oculte el punto  $D$ .
5. Marque el ángulo  $\alpha = \widehat{A}$ .
6. Use la herramienta *Ángulo dada su amplitud* para dibujar un ángulo  $\beta$  de lado  $A'B'$  y de amplitud  $\alpha$ . Aparecerá un punto  $B''$ .
7. Trace la semirrecta  $f = A'B''$ .
8. Transporte el segmento  $AC$  sobre  $f$ . Al punto creado llámelo  $C'$ .
9. Oculte  $B''$ .
10. Dibuje el triángulo  $A'B'C'$ .
11. Muestre que  $\widehat{B} \equiv \widehat{B}'$  y  $\widehat{C} \equiv \widehat{C}'$  (sugerencia: use el axioma III 5)
12. Suponga, para reducir el problema al absurdo, que el segmento  $BC$  no es congruente con el segmento  $B'C'$ .

- a) Dibuje un punto  $D' \neq C'$  sobre la semirrecta  $B'C'$  y suponga que el segmento  $B'D'$  es congruente con  $BC$ .
- b) Muestre que  $\widehat{A} \equiv \widehat{B'A'D'}$  y  $\widehat{C} \equiv \widehat{B'D'A'}$ .
- c) Muestre que esto es contradictorio.

13. Concluya con la prueba.

**Teorema 149. (Criterio ALA)** *Si en dos triángulos  $ABC$  y  $A'B'C'$  tienen lugar las congruencias*

$$AB \equiv A'B', \widehat{A} \equiv \widehat{A'}, \text{ y } \widehat{B} \equiv \widehat{B'}$$

*entonces  $ABC \equiv A'B'C'$*

**Ejercicio 150.** Pruebe el teorema 149 siguiendo los pasos a continuación.

1. Dibuje el triángulo  $ABC$ .
2. Trace la semirrecta  $d = A'D$ , donde  $D$  es un punto cualquiera del plano.
3. Transporte el segmento  $AB$  sobre  $d$ . Al punto creado llámelo  $B'$ .
4. Oculte el punto  $D$ .
5. Marque el ángulo  $\alpha = \widehat{A}$ .
6. Use la herramienta “Ángulo dada su amplitud” para dibujar un ángulo  $\beta$  de lado  $A'B'$  y de amplitud  $\alpha$ . Aparecerá un punto  $B''$ .
7. Trace la semirrecta  $e = A'B''$ .
8. Oculte  $B''$ .
9. Marque el ángulo  $\gamma = \widehat{B}$ .

### 3.3. CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS

---

10. Use la herramienta “Ángulo dada su amplitud” para dibujar un ángulo  $\delta$  de lado  $B'A'$  y de amplitud  $\gamma$ , del mismo que la semirrecta  $e$ , con respecto a  $d$ . Aparecerá un punto  $A''$ .
11. Trace la semirrecta  $f = B'A''$ .
12. Oculte  $A''$ .
13. Marque un punto  $D'$  sobre  $f$  distinto de la posible intersección de  $e$  con  $f$ . (Esta intersección no puede asegurarse con los axiomas asumidos hasta ahora, dado que aún no hemos admitido el axioma de las paralelas).
14. Suponga, para reducir el problema al absurdo, que el segmento  $B'D'$  es congruente con el segmento  $BC$ .
  - a) Muestre que los triángulos  $ABC$  y  $A'B'D'$  son congruentes (sugerencia: use el criterio LAL)
  - b) Muestre que  $\widehat{A} \equiv \widehat{B'A'D'} \equiv \widehat{B'A'B''}$ .
  - c) Muestre que esto es contradictorio.
15. Concluya con la prueba.

**Teorema 151. (Suma y resta de ángulos)** Sean  $h, k, l$  y  $h', k', l'$  tríos de semirrectas que parten de los puntos  $O$  y  $O'$  respectivamente, tal que cada trío se encuentre en un mismo plano. Supongamos, además, que alguna de las semirrectas  $h, k, l$  se encuentre en el interior del ángulo determinado por las otras dos y la semirrecta correspondiente en la terna  $h', k', l'$  se encuentre en la misma disposición. Entonces, si

$$\angle (h, l) \equiv \angle (h', l') \text{ y } \angle (l, k) \equiv \angle (l', k')$$

se sigue que

$$\angle (h, k) \equiv \angle (h', k')$$

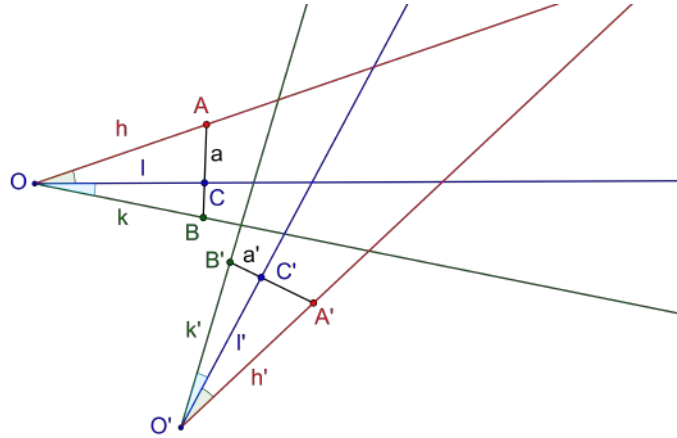


Figura 3.3.1: Suma y resta de ángulos

**Ejercicio 152.** Pruebe el teorema 151 siguiendo los pasos a continuación.

1. Dibuje las semirrectas  $h$ ,  $k$  y  $l$  con origen común  $O$ , tal que  $l$  sea interior al ángulo formado por las otras dos. (Caso 1:  $l$  entre  $h$  y  $k$ ).
2. Marque los puntos  $A$  y  $B$  sobre  $h$  y  $k$  respectivamente y el segmento  $a = AB$ .
3. Muestre que existe un punto  $C$  de corte entre  $a$  y  $l$ . Dibuje a  $C$ .
4. Marque los ángulos  $\alpha = \widehat{AOC}$  y  $\beta = \widehat{BOC}$ .
5. Marque dos puntos  $O'$  y  $D$ .
6. Trace una semirrecta  $l' = O'D$ .
7. Dibuje la semirrecta  $h'$  que resulta de la rotación en sentido horario de la semirrecta  $l'$  con centro  $O'$  un ángulo  $\alpha$  (vea la figura 3.3.1).

### 3.3. CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS

---

8. Dibuje la semirrecta  $k'$  que resulta de la rotación en sentido antihorario de la semirecta  $l'$  con centro  $O'$  un ángulo  $\beta$  (vea la figura 3.3.1).
9. Suponga para reducir el problema al absurdo que  $\sphericalangle(h, k)$  no es congruente a  $\sphericalangle(h', k')$ .
  - a) Muestre que debe existir una semirrecta  $k_1 \neq k'$  del mismo lado donde está  $l'$  con respecto a  $h'$  tal que  $\sphericalangle(h, k) \equiv \sphericalangle(h', k_1)$ . Dibuje a  $k_1$ .
  - b) Dibuje sobre  $h'$  un punto  $A'$  tal que  $OA \equiv O'A'$ .
  - c) Dibuje sobre  $k_1$  un punto  $B'$  tal que  $OB \equiv O'B'$ .
  - d) Trace el segmento  $b = A'B'$ .
  - e) Muestre que  $\widehat{O'A'B'} \equiv \widehat{OAB}$ ,  $\widehat{O'B'A'} \equiv \widehat{OBA}$  y  $AB \equiv A'B'$ .
  - f) Muestre que sobre la semirrecta  $A'B'$  debe haber un punto  $C'$  tal que  $AC \equiv A'C'$  y que se encuentre entre  $A'$  y  $B'$ . Dibuje a  $C'$ .
  - g) Muestre que los triángulos  $OAC$  y  $O'A'C'$  son congruentes.
  - h) Pruebe que  $C'$  es también el corte de  $l'$  y  $b$ .
  - i) Muestre que los segmentos  $B'C'$  y  $BC$  son congruentes.
  - j) Muestre que los triángulos  $OCB$  y  $O'C'B'$  son congruentes.
  - k) Pruebe que  $\widehat{COB} \equiv \widehat{C'O'B'}$ .
  - l) Llegue a una contradicción.
10. Concluya el Caso 1.
11. Abra otra hoja de GeoGebra.
12. Dibuje las semirrecta  $h$ ,  $k$  y  $l$  con origen común  $O$ , tal que  $k$  sea interior del ángulo formado por las otras dos. (Caso 2:  $k$  entre  $h$  y  $l$ ).

CAPÍTULO 3. CONGRUENCIA

---

13. Marque los puntos  $A$  y  $C$  sobre  $h$  y  $l$ , respectivamente, y el segmento  $a = AC$ .
14. Muestre que existe un punto  $B$  de corte entre  $a$  y  $k$ . Dibuje a  $B$ .
15. Marque los ángulos  $\alpha = \widehat{AOC}$  y  $\beta = \widehat{BOC}$ .
16. Marque dos puntos  $O'$  y  $D$ .
17. Trace una semirrecta  $l' = O'D$ .
18. Dibuje la semirrecta  $h'$  que resulta de la rotación en sentido antihorario de la semirecta  $l'$  con centro  $O'$  un ángulo  $\alpha$  (vea la figura 3.3.1).
19. Dibuje la semirrecta  $k'$  que resulta de la rotación en sentido antihorario de la semirecta  $l'$  con centro  $O'$  un ángulo  $\beta$  (vea la figura 3.3.1).
20. Dibuje sobre  $h'$  un punto  $A'$  tal que  $OA \equiv O'A'$ .
21. Dibuje sobre  $l'$  un punto  $C'$  tal que  $OC \equiv O'C'$ .
22. Trace el segmento  $b = A'C'$ .
23. Muestre que  $\widehat{O'A'C'} \equiv \widehat{OAC}$ ,  $\widehat{O'C'A'} \equiv \widehat{OCA}$  y  $AC \equiv A'C'$ .
24. Marque un punto  $B'$  sobre la semirrecta  $C'A'$  de tal manera que  $CB \equiv C'B'$ .
25. Pruebe que  $B'$  tiene que estar entre  $A'$  y  $C'$  y que  $AB \equiv A'B'$ .
26. Muestre que los triángulos  $OBA$  y  $O'B'A'$  son congruentes.
27. Pruebe que  $\widehat{AOB} \equiv \widehat{A'O'B'}$ .
28. Concluya la prueba.

### 3.3. CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS

**Teorema 153.** Sean  $h, k, l$  y  $h', k', l'$  tríos de semirrectas que parten de los puntos  $O$  y  $O'$  respectivamente, tal que cada trío se encuentre en un mismo plano. Supongamos, además, que las semirrectas  $k, l$  se encuentran en el mismo lado con respecto a  $h$  y las semirrectas  $k', l'$  se encuentran en el mismo lado con respecto a  $h'$ . Entonces, si

$$\angle (h, l) \equiv \angle (h', l') \quad \text{y} \quad \angle (h, k) \equiv \angle (h', k')$$

y si  $k$  está entre  $h$  y  $l$ , se sigue que  $k'$  está entre  $h'$  y  $l'$  y

$$\angle (l, k) \equiv \angle (l', k')$$

**Ejercicio 154.** Pruebe el teorema 153 siguiendo los pasos a continuación.

1. Dibuje las semirrecta  $h, k$  y  $l$  con origen común  $O$ , tal que  $k$  sea interior del ángulo formado por las otras dos.
2. Marque los puntos  $A$  y  $C$  sobre  $h$  y  $l$ , y el segmento  $a = AC$ .
3. Muestre que existe un punto  $B$  de corte entre  $a$  y  $k$ . Dibuje a  $B$ .
4. Marque los ángulos  $\alpha = \widehat{AOC}$  y  $\beta = \widehat{AOB}$ .
5. Trace una semirrecta  $h' = O'D$ .
6. Dibuje dos ángulos  $\gamma$  y  $\delta$  de lado  $O'D$  de amplitud  $\alpha$  y  $\beta$  respectivamente, del mismo lado de  $O'D$ . Aparecerán los puntos  $D'$  y  $D'_1$ .
7. Trace las semirrectas  $l' = O'D'$  y  $k' = O'D'_1$ .
8. Dibuje sobre  $h'$  un punto  $A'$  tal que  $OA \equiv O'A'$ .
9. Dibuje sobre  $l'$  un punto  $C'$  tal que  $OC \equiv O'C'$ .
10. Oculte  $D, D'$  y  $D'_1$ .
11. Muestre que  $\widehat{O'A'C'} \equiv \widehat{OAC}$ ,  $\widehat{O'C'A'} \equiv \widehat{OCA}$  y  $AC \equiv A'C'$ .

12. Trace la semirrecta  $b = A'C'$ .
13. Dibuje sobre  $b$  un punto  $B'$  y suponga que  $AB \equiv A'B'$ . (No use la herramienta transporte de segmentos y no lo dibuje tal que coincida con el corte de  $b$  y  $k'$ ).
14. Muestre que  $B'$  está entre  $A'$  y  $C'$  y que  $BC \equiv B'C'$ .
15. Muestre que los ángulos  $\widehat{COB}$  y  $\widehat{C'O'B'}$  son congruentes.
16. Muestre que  $k'$  pasa por  $B'$ .
17. Concluya la prueba.

**Definición 155.** Un triángulo es *isósceles* si tiene dos lados congruentes. Al tercer lado lo llamamos *base* del triángulo isósceles .

**Teorema 156. (*Pons Ansinorum*)** *En un triángulo isósceles los ángulos de la base son congruentes.*

**Ejercicio 157.** Demuestre el teorema 156 mediante los pasos siguientes:

1. Trace un segmento  $a = AB$ .
2. Cree un deslizador de tipo número, de nombre  $b$  en el intervalo 0 a 5 con incremento 0,1.
3. Dibuje una circunferencia  $c$  con centro  $A$  y radio  $b$ .
4. Dibuje una circunferencia  $d$  con centro  $B$  y radio  $b$ .
5. Arrastre el deslizador  $b$  hasta que las circunferencias se corten.
6. Marque un punto de corte  $C$  de  $c$  y  $d$ .
7. Marque el polígono  $ABC$ . ¿Qué característica tiene la figura encontrada?

### 3.3. CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS

---

- Use el criterio LAL para mostrar que el triángulo  $ACB$  es congruente con el  $BCA$ .
- Concluya la prueba.

**Teorema 158.** *Si en un triángulo hay dos ángulos congruentes, el triángulo es isósceles.*

**Ejercicio 159.** Demuestre el teorema 158 mediante los siguientes pasos.

- Trace un segmento  $a = AB$ .
- Cree un deslizador de tipo ángulo, de nombre  $\alpha$  en el intervalo  $0^\circ$  a  $90^\circ$  con incremento  $5^\circ$ .
- Use la herramienta “Ángulo dada su amplitud” para dibujar un ángulo  $\beta$  de lado  $AB$  y de amplitud  $\alpha$ . Aparecerá un punto  $A'$  de tal modo que  $\widehat{ABA'} = \alpha$ .
- Use la herramienta “Ángulo dada su amplitud” para dibujar un ángulo  $\gamma$  de lado  $BA$  y de amplitud  $\alpha$ , del mismo lado que  $\beta$  con respecto a la prolongación de  $a$ . Aparecerá un punto  $B'$  de tal modo que  $\widehat{BAB'} = \alpha$ . Si  $\gamma$  queda en lado distinto que  $\beta$  respecto de  $AB$ , haga Ctrl+Z y repita este paso seleccionando el sentido contrario.
- Trace las rectas  $b = AB'$  y  $c = BA'$ .
- Marque la intersección de  $c$  y  $b$  y llámele  $C$ .
- Marque el polígono  $ABC$  ¿Qué característica tiene la figura encontrada?
- Use el criterio ALA para mostrar que el triángulo  $CAB$  es congruente con el  $CBA$ . Muestre que los lados  $AC$  y  $BC$  son congruentes.
- Concluya la prueba.

**Teorema 160. (Criterio LLL)** Si en dos triángulos  $ABC$  y  $A'B'C'$  tienen lugar las congruencias

$$AB \equiv A'B', \quad BC \equiv B'C' \quad \text{y} \quad CA \equiv C'A'$$

entonces  $ABC \equiv A'B'C'$ .

**Ejercicio 161.** Pruebe el teorema 160 siguiendo los pasos a continuación.

1. Dibuje el triángulo  $ABC$ .
2. Trace una semirrecta  $d = A'D$ .
3. Marque en  $d$  un punto  $B'$  tal que  $AB \equiv A'B'$ .
4. Oculte el punto  $D$ .
5. Trace la circunferencia  $e$  de centro  $A'$  y de radio congruente al segmento  $AC$ .
6. Trace la circunferencia  $f$  de centro  $B'$  y de radio congruente al segmento  $BC$ .
7. Marque una intersección  $C'$  de  $e$  y  $f$ .
8. Oculte  $d$ ,  $e$  y  $f$ .
9. Trace los segmentos  $c' = A'B'$ ,  $b' = A'C'$  y  $a' = B'C'$ .
10. Suponga, para reducir el problema al absurdo, que  $\widehat{BAC}$  y  $\widehat{B'A'C'}$  no son congruentes
  - a) Pruebe que debe existir una semirrecta  $g = A'E$  del mismo lado que  $C'$  con respecto a la recta  $A'B'$ , de tal forma que  $\widehat{BAC} \equiv \widehat{B'A'E}$ . Dibuje a  $g$  con líneas de trazos.
  - b) Marque el ángulo  $\alpha = \widehat{B'A'E}$ .

### 3.3. CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS

---

- c) Trace el ángulo  $\beta$  del otro lado de  $C'$  con respecto a la recta  $A'B'$ , de lado  $A'B'$  y de amplitud  $\alpha$ . Aparecerá un punto  $B''$ .
- d) Marque los puntos  $C''$  y  $C'''$  sobre las semirrecta  $A'E$  y  $A'B''$  de tal modo que  $AC \equiv A'C''$  y  $AC \equiv A'C'''$ .
- e) Oculte  $E$  y  $B''$ .
- f) Marque los segmentos  $b'' = A'C''$ ,  $a'' = B'C''$ ,  $b''' = A'C'''$  y  $a''' = B'C'''$ .
- g) Pinte de rojo a los segmentos  $a$ ,  $a'$ ,  $a''$  y  $a'''$ , de azul a  $b$ ,  $b'$ ,  $b''$  y  $b'''$ , y de negro a  $c$  y  $c'$ .
- h) Muestre que los triángulos  $ABC$  y  $A'B'C''$  son congruentes, y que los triángulos  $ABC$  y  $A'B'C'''$  también son congruentes.
- i) Muestre que los segmentos  $a$ ,  $a'$ ,  $a''$  y  $a'''$  son congruentes. Igualmente  $b$ ,  $b'$ ,  $b''$  y  $b'''$ ; y  $c$  y  $c'$ .
- j) Trace el segmento  $h = C'C'''$ .
- k) Pruebe que  $\widehat{A'C'C''} \equiv \widehat{A'C'''C'}$  y que  $\widehat{B'C'C''} \equiv \widehat{B'C'''C'}$ .
- l) Pruebe que  $\widehat{A'C'B'} \equiv \widehat{A'C'''B'}$  (sugerencia: use el teorema de suma y resta de ángulos).
- m) Pruebe que  $\widehat{B'A'C'} \equiv \widehat{B'A'C''}$ .
- n) Muestre que esto lleva una contradicción.

11. Concluya la prueba.

**Teorema 162.** Si  $\angle (h, k) \equiv \angle (h', k')$  y  $\angle (h, k) \equiv \angle (h'', k'')$ , entonces  $\angle (h', k') \equiv \angle (h'', k'')$

**Ejercicio 163.** Pruebe el teorema 162 siguiendo los pasos a continuación.

1. Dibuje los puntos  $O$ ,  $O'$  y  $O''$ .

2. Trace las semirrectas  $h = OA$ ,  $h' = O'B$  y  $h'' = O''C$ .
3. Trace la semirrecta  $k = OD$ .
4. Marque el ángulo  $\alpha = \widehat{AOD}$ .
5. Trace dos ángulos  $\beta$  y  $\gamma$  de amplitud  $\alpha$  de lados  $h'$  y  $h''$ . Aparecerán puntos  $B'$  y  $C'$ .
6. Trace las semirrectas  $k' = O'B'$  y  $k'' = O''C'$ .
7. Marque un punto  $A$  sobre la semirrecta  $h$ . Observe que el punto que anteriormente era llamado  $A$  se renombra a  $A_1$ .
8. Marque un punto  $B$  sobre  $k$ .
9. Marque puntos  $A'$  y  $A''$  sobre  $h'$  y  $h''$  tales que  $OA \equiv O'A'$  y  $OA \equiv O''A''$ .
10. Marque puntos  $B'$  y  $B''$  sobre  $k'$  y  $k''$  tales que  $OB \equiv O'B'$  y  $OB \equiv O''B''$ .
11. Oculte los puntos  $A_1, B_1, B'_1, C, D, C'$ .
12. Muestre que los triángulos  $O'A'B'$  y  $O''A''B''$  son congruentes con el  $OAB$ .
13. Muestre que  $A'B' \equiv A''B''$ .
14. Muestre que los ángulos  $\widehat{O'A'B'}$  y  $\widehat{O''A''B''}$  son congruentes.
15. Concluya la prueba.

**Teorema 164.** *La relación de congruencia entre ángulos es de equivalencia.*

**Corolario 165.** *La relación de congruencia entre triángulos es de equivalencia.*

**Ejercicio 166.** Pruebe el teorema 164 y el corolario 165 (sugerencia: use el teorema 162 y revise la prueba del teorema 136).

### 3.4. APLICACIONES CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS

---

*Observación 167.* Es muy común usar la notación

$$A_1B_1 \equiv A_2B_2 \equiv \cdots \equiv A_nB_n$$

como abreviatura de

$$\begin{aligned} A_1B_1 \equiv A_2B_2, AB_1 \equiv A_3B_3, \dots, AB_1 \equiv A_nB_n, \\ A_2B_2 \equiv A_3B_3, \dots, AB_2 \equiv A_nB_n \end{aligned}$$

Notación parecida usamos para el caso de ángulos y de triángulos.

Gracias a los teoremas 136 y 164, para probar la validez de una cadena, podemos probar cada eslabón una sola vez en cualquier orden.

## 3.4. Aplicaciones de la congruencia de triángulos

**Teorema 168.** *Si dos ángulos son congruentes, sus adyacentes también lo son.*

**Ejercicio 169.** Pruebe el teorema 168 mediante los siguientes pasos.

1. Primero construya dos ángulos  $\alpha$  y  $\beta$  congruentes del siguiente modo:
  - a) Trace la recta  $AB = a$ .
  - b) Trace la circunferencia  $c$  de centro  $A$  que pase por  $B$ .
  - c) Dibuje un punto  $C$  sobre  $c$ .
  - d) Dibuje el segundo corte  $D$  de  $a$  y  $c$ .
  - e) Trace la semirrecta  $b$  de origen  $A$  que pasa por  $C$ .
  - f) Dibuje un punto  $A'$ .
  - g) Trace la circunferencia  $d$  de radio  $AB$  y centro  $A'$ .
  - h) Marque un punto  $B'$  en  $d$ .

- i)* Trace la recta  $e = A'B'$ .
  - j)* Marque el ángulo (marque los vértices en sentido horario)  
 $\alpha = \widehat{BAC}$ .
  - k)* Dibuje un ángulo  $\beta$  de lado la semirrecta  $A'B'$  y amplitud  $\alpha$ . Se creará un punto  $B''$ .
2. Ahora, muestre que los ángulos adyacentes de  $\alpha$  y de  $\beta$  son congruentes, para esto haga lo siguiente:
- a)* Renombre el punto  $B''$  como  $C'$ .
  - b)* Trace la semirrecta  $A'C'$ .
  - c)* Dibuje el segundo corte  $D'$  de  $e$  y  $d$ .
  - d)* Mediante el criterio de congruencia  $LAL$  muestre que  $ABC$  es congruente con  $A'B'C'$ .
  - e)* Muestre que  $BC \equiv B'C'$  y  $\widehat{CBA} \equiv \widehat{C'B'A'}$ .
  - f)* Mediante el criterio de congruencia  $LAL$  muestre que  $BCD$  es congruente con  $B'C'D'$ .
  - g)* Muestre usando el criterio de congruencia  $LLL$  que  $ACD$  es congruente con  $A'C'D'$ .
  - h)* Concluya con el ejercicio.

**Corolario 170.** *Los ángulos opuestos por el vértice son congruentes.*

**Ejercicio 171.** Pruebe el corolario 170

1. Trace la recta  $a = AB$ .
2. Dibuje un punto  $C$  fuera de  $a$ .
3. Trace la recta  $b = AC$ .
4. Dibuje un punto  $D$  en  $a$  tal que  $A$  está entre  $D$  y  $B$ .
5. Dibuje un punto  $E$  en  $b$  tal que  $A$  está entre  $E$  y  $C$ .

### 3.4. APLICACIONES CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS

---

6. Use el teorema 168 para mostrar que los ángulos opuestos por el vértice  $\widehat{BAC}$  y  $\widehat{DAE}$  son adyacentes al mismo ángulo y, por lo tanto, congruentes.

**Definición 172.** Un ángulo congruente con su adyacente se llama *recto*. Dos rectas que contienen los lados de un ángulo recto se dicen *perpendiculares*.

**Proposición 173.** *Existe un ángulo recto.*

**Ejercicio 174.** Pruebe la proposición 173 siguiendo los pasos a continuación.

1. Pruebe que existen tres puntos  $A, O, U$  que no están sobre una misma recta y que hay una recta  $a$  que pasa por  $O$  y por  $U$ . Dibuje estos elementos.
2. Trace el segmento  $b = AO$ .
3. Marque un punto  $A'$  al otro lado de  $a$  de donde está  $A$ , tal que  $\widehat{UOA} \equiv \widehat{UOA'}$ , y  $OA \equiv OA'$ . Para el dibujo puede usar la herramienta “Simetría axial”. Pruebe que todos estos objetos existen.
4. Suponga primeramente que  $A, O$  y  $A'$  no están alineados. Arrastre  $A$  hasta que quede así en su dibujo.
5. Trace el segmento  $d = AA'$ .
6. Muestre que  $a$  y  $d$  se cortan en un punto  $B$ .
7. Muestre que el triángulo  $AOB$  es congruente con el  $A'OB$ .
8. Muestre, para este caso, este teorema.
9. Pruebe el teorema para el caso en que  $A, O$  y  $A'$  están alineados. Arrastre el punto  $A$  hasta que sea el caso.
10. Concluya con la prueba.

**Teorema 175.** *Todos los ángulos rectos son congruentes entre sí.*

**Ejercicio 176.** Pruebe el teorema 175 siguiendo los pasos a continuación:

1. Dibuje dos semirrectas  $h = OA$  y  $h' = O'A'$ .
2. Trace por  $O$  y por  $O'$  perpendiculares  $a$  y  $a'$ , a  $h$  y  $h'$ .
3. Marque los puntos  $B$  y  $C$  a ambos lados de  $O$  sobre  $a$ .
4. Marque los puntos  $B'$  y  $C'$  a ambos lados de  $O'$  sobre  $a'$ .
5. Oculte  $a$  y  $a'$ .
6. Trace las semirrectas  $k = OB$  y  $k' = O'B'$ . Píntelas de rojo.
7. Trace las semirrectas  $k_1 = OC$  y  $k'_1 = O'C'$ . Píntelas de azul.
8. Suponga para reducir el problema al absurdo que  $\sphericalangle(h, k)$  no es congruente con  $\sphericalangle(h', k')$ .
  - a) Muestre que debe haber una semirrecta  $l$  (de origen  $O'$ ) del mismo lado que  $h'$  con respecto a la prolongación de  $k'$  tal que  $\sphericalangle(l, k') \equiv \sphericalangle(h, k)$  y que  $h' \neq l$ .
  - b) Muestre que  $l$  debe ser interior a  $\sphericalangle(h', k')$  o a  $\sphericalangle(h', k'_1)$  (sugerencia: use la proposición 118).
  - c) Suponga que  $l$  sea interior a  $\sphericalangle(h', k')$ . Dibuje a  $l$  y píntela de verde.
  - d) Muestre que existe una semirrecta  $l_1$  (de origen  $O'$ ) del mismo lado que  $h'$  con respecto a la prolongación de  $k'$  tal que  $\sphericalangle(l_1, k'_1) \equiv \sphericalangle(l, k')$ .
  - e) Muestre que  $l_1$  debe ser interior a  $\sphericalangle(h', k'_1)$  (sugerencia: use el teorema 153). Dibújela usando la herramienta “Simetría axial”.

### 3.4. APLICACIONES CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS

---

f) Pruebe la cadena de congruencias

$$\angle (l_1, k'_1) \equiv \angle (l, k') \equiv \angle (h, k) \equiv \angle (h, k_1) \equiv \angle (l, k'_1)$$

g) Muestre que esto es absurdo.

9. Concluya la prueba.

**Teorema 177.** *Dados los ángulos  $\alpha = \widehat{ABC}$  y  $\beta = \widehat{A'B'C'}$  tal que  $\alpha$  es congruente con un adyacente de  $\beta$ , entonces  $\beta$  es congruente con un adyacente de  $\alpha$ .*

**Ejercicio 178.** Pruebe el teorema 177 siguiendo los pasos a continuación.

1. Dibuje los puntos  $A, B$  y  $C$  no alineados y los puntos  $A', B'$  y  $C'$  no alineados.
2. Trace las semirrectas  $a = BA, b = BC, a' = B'A', b' = B'C'$ .
3. Arrastre el punto  $A'$  hasta que parezca que  $\alpha = \widehat{ABC}$  se parezca a un adyacente de  $\beta = \widehat{A'B'C'}$ .
4. Trace las semirrectas  $d = BD$  opuesta a  $a$  y  $d' = B'D'$  opuesta a  $a'$ .
5. Observe que  $\alpha$  es congruente con  $\beta = \widehat{D'B'C'}$ .
6. Muestre que  $\beta$  es congruente con  $\beta = \widehat{DBC}$  (sugerencia: use el teorema 168).
7. Concluya la prueba.

**Definición 179.** Dos ángulos  $\alpha$  y  $\beta$ , en las condiciones del teorema 177, se dicen *suplementarios*. También usamos la expresión *la suma de  $\alpha$  y  $\beta$  es igual a dos rectos* y denotamos  $\alpha + \beta = \pi$ . Similarmente, si  $\alpha$  es menor que el suplementario de  $\beta$  usamos la expresión *la suma de  $\alpha$  y  $\beta$  es menor a dos rectos* y denotamos  $\alpha + \beta < \pi$ .

### 3.4.1. El punto medio de un segmento

**Definición 180.** Sean los puntos  $A$  y  $B$  diferentes. Decimos que el punto  $O$  es el *punto medio* del segmento  $AB$ , si está sobre la recta  $AB$  y satisface la condición  $AO \equiv BO$ <sup>1</sup>.

**Teorema 181.** *El punto medio de un segmento existe y es único.*

**Ejercicio 182.** Pruebe el teorema 181 siguiendo los pasos a continuación.

1. Dibuje el segmento  $a = AB$ .
2. Pruebe la existencia de los siguientes objetos y dibújelos:
  - a) Un punto  $M$  fuera de la recta  $AB$ .
  - b) La semirrecta  $b = AM$ .
  - c) La semirrecta  $c$  al otro lado del punto  $M$  con respecto a la recta  $AB$  tal que el ángulo formado por la semirrecta  $BA$  y  $c$  sea congruente al formado por la semirrecta  $AB$  y  $b$ .
3. Para las rectas prolongaciones de  $c$  y  $b$  pueden darse tres casos: hay un punto de corte  $P$  de la prolongación de  $c$  con  $b$ , hay un punto de corte  $P$  de la prolongación de  $b$  con  $c$  o definitivamente no se cortan.  $P$ , en estas circunstancias, no existe, pero todavía no lo hemos demostrado<sup>2</sup>. En el primer caso, tomaríamos un punto  $C$  que esté entre  $A$  y  $P$  y un punto  $D$  en  $c$  tal que  $AC \equiv BD$ . En el segundo caso tomaríamos un punto  $D$  que esté entre  $B$  y  $P$  y un punto  $C$  en  $b$  tal que  $AC \equiv BD$ . En el tercer caso tomaríamos un punto  $C$  que esté en  $b$  y un punto  $D$  en  $c$  tal que  $AC \equiv BD$ . Pruebe la existencia de  $C$  y  $D$ .

---

<sup>1</sup>Es fácil ver que si el punto  $B$  estuviera entre  $A$  y  $O$  (o  $A$  entre  $B$  y  $O$ ), entonces  $AO$  no podría ser congruente con  $OB$ . De esto surge que  $O$  debe estar entre  $A$  y  $B$ .

<sup>2</sup>Esta es una consecuencia inmediata del Primer Teorema del Ángulo Exterior (teorema 209)

### 3.4. APLICACIONES CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS

---

4. Trace el segmento  $d = CD$ .
5. Pruebe que los segmentos  $a$  y  $d$  están en el mismo lado con respecto a la prolongación de  $b$  y en el mismo lado con respecto a la prolongación de  $c$ .
6. Pruebe la existencia del punto  $O$  de corte de  $d$  con la recta  $AB$ . Dibuje a  $O$ .
7. Pruebe que  $O$  debe estar en las semirrectas  $AB$  y  $BA$ .
8. Pruebe que  $O$  está entre  $A$  y  $B$ .
9. Dibuje los segmentos  $e = CB$  y  $f = AD$ .
10. Pruebe que los triángulos  $ACB$  y  $ADB$  son congruentes.
11. Muestre que  $CB \equiv AD$ .
12. Pruebe que los triángulos  $ACD$  y  $BDC$  son congruentes.
13. Pruebe que los ángulos  $\widehat{ACD}$  y  $\widehat{BDC}$  son congruentes.
14. Muestre que los triángulos  $ACO$  y  $BDO$  son congruentes.
15. Pruebe que  $O$  es *un* punto medio de  $a$ .
16. Para probar que todos los puntos medios de  $a$  tienen que estar en el segmento  $a$ , abra otra hoja de GeoGebra y siga los pasos a continuación.
  - a) Dibuje un segmento  $a = AB$ .
  - b) Suponga para reducir el problema al absurdo que existe un punto medio  $O$  que no está en  $a$ . Por ejemplo, que  $A$  esté entre  $O$  y  $B$ .
    - 1) Muestre que  $A$  y  $B$  están sobre la semirrecta  $OA$ .
    - 2) Muestre que esto lleva a un absurdo con la definición de punto medio.

- c) Concluya que *todos* los puntos medios de  $a$  tienen que estar en  $a$ .
17. Para probar la *unicidad* del punto medio, suponga por reducción al absurdo que existen dos puntos medios  $O$  y  $O'$ . Dibuje a  $O$  con la herramienta “punto medio”.
- a) Muestre que  $O'$  tiene que estar entre  $A$  y  $O$  o entre  $B$  y  $O$ . Suponga que esté entre  $A$  y  $O$ . Dibuje a  $O'$ .
- b) Muestre que existe un  $O''$  sobre la semirrecta  $BA$  de tal modo que  $O'A \equiv O''B$ .
- c) Muestre que  $O''$  tiene que estar entre  $O$  y  $B$  (sugerencia: use el teorema 138).
- d) Muestre que  $O'$  y  $O''$  son diferentes. Dibuje a  $O''$ .
- e) Pruebe la siguiente cadena de congruencias:

$$O'B \equiv O'A \equiv O''B$$

- f) Muestre que esto lleva a un absurdo.

18. Concluya la prueba.

### 3.4.2. Bisectriz de un ángulo

**Definición 183.** Sea el ángulo  $\angle (h, k)$ . Decimos que la semirrecta  $b$  es una *bisectriz* del  $\angle (h, k)$ , si es interior a  $\angle (h, k)$  y satisface la condición  $\angle (h, b) \equiv \angle (b, k)$ .

**Corolario 184.** *La bisectriz de un ángulo existe y es única.*

**Ejercicio 185.** Pruebe el corolario 184 siguiendo los pasos a continuación.

1. Dibuje un ángulo  $\angle (h, k)$  de vértice  $O$ .
2. Dibuje un punto  $A$  sobre  $h$ .

### 3.4. APLICACIONES CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS

---

3. Dibuje un punto  $B$  sobre  $k$ , tal que  $OA \equiv OB$ .
4. Trace el segmento  $a = AB$ .
5. Dibuje el punto medio  $M$  del  $a$ .
6. Pruebe que la semirrecta  $b = OM$  es una bisectriz de  $\angle (h, k)$  (sugerencia: use el criterio LLL).
7. Suponga, para reducir el problema al absurdo, que existe una semirrecta  $b'$  interior a  $\angle (h, k)$  que es otra bisectriz de  $\angle (h, k)$  distinta de  $b$ .
  - a) Muestre que  $b'$  debe cortar a  $a$  en un punto  $M'$  distinto de  $M$ .
  - b) Muestre que  $M'$  es un punto medio del segmento  $a$  (sugerencia: use el criterio LAL).
  - c) Muestre que esto es absurdo.
8. Concluya la prueba.

**Definición 186.** Las *medianas* de un triángulo son segmentos que van de un vértice al punto medio del lado opuesto. Las *bisectrices* de un triángulo son las bisectrices de los ángulos interiores. Las *alturas* de un triángulo son los segmentos sobre la perpendicular al lado opuesto, desde un vértice al corte con la prolongación del lado opuesto. Dicho corte se denomina *pie de la altura*. En ocasiones, cuando no lleve a una ambigüedad, usamos bisectriz para referirnos al segmento sobre la bisectriz que está en el interior del triángulo.

**Proposición 187.** *En un triángulo isósceles la mediana de la base es a la vez altura y bisectriz del ángulo opuesto a la base.*

**Ejercicio 188.** Demuestre la proposición 187 usando el criterio LLL.

### 3.4.3. Perpendicularidad en el plano

**Proposición 189.** *Por un punto  $P$  pasa una única perpendicular a la recta  $a$ .*

**Ejercicio 190.** Pruebe la proposición 189 siguiendo los pasos a continuación.

1. Para probar que por un *punto exterior a una recta* pasa una perpendicular, haga lo siguiente:
  - a) Dibuje una recta  $a$  y un punto  $P$  exterior a  $a$ .
  - b) Marque en  $a$  un punto  $A$ .
  - c) Sea  $b$  una de las semirrectas de origen  $A$  sobre  $a$ .
  - d) Trace la semirrecta  $c = AP$ .
  - e) Trace una semirrecta  $d$  del otro lado de  $P$  con respecto a  $a$  tal que  $\sphericalangle(b, c) \equiv \sphericalangle(b, d)$ .
  - f) Tome un punto  $P'$  sobre  $d$  tal que  $AP \equiv AP'$ .
  - g) Trace la recta  $e = PP'$ .
  - h) Marque el punto  $O$  de corte de  $e$  y  $a$ .
  - i) Pruebe que  $e$  es una perpendicular a  $a$  por  $P$ . Tenga en cuenta los casos siguientes:  $O$  está en  $b$ ,  $O = A$  y  $O$  está en la opuesta de  $b$ .
  - j) Concluya con la existencia de la perpendicular por un punto exterior a una recta.
  
2. Para probar la *unicidad* de la perpendicular por un *punto exterior a una recta*, siga los pasos a continuación:
  - a) Abra otra hoja de GeoGebra.
  - b) Dibuje una recta  $a$  y un punto  $P$  exterior a  $a$ .
  - c) Suponga para reducir el problema al absurdo que por  $P$  pasan dos perpendiculares  $b$  y  $c$  a  $a$ . Dibuje a  $b$  y  $c$  y sus pies  $O$  y  $O'$  respectivamente.

### 3.4. APLICACIONES CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS

---

- 1) Dibuje sobre  $b$  un punto  $P'$  del otro lado de  $P$  con respecto a  $a$  tal que  $OP \equiv OP'$ .
  - 2) Trace la recta  $d = O'P'$ .
  - 3) Muestre que  $d$  y  $c$  son diferentes.
  - 4) Pruebe que los triángulos  $OO'P$  y  $OO'P'$  son congruentes.
  - 5) Pruebe que los ángulos  $\widehat{OO'P}$  y  $\widehat{OO'P'}$  son congruentes.
  - 6) Muestre que esto es contradictorio.
3. Concluya la prueba del teorema cuando el punto es exterior a la recta.
4. Para probar la *existencia* de la perpendicular por un *punto de una recta*, siga los pasos a continuación.
- a) Abra otra hoja de GeoGebra.
  - b) Dibuje una recta  $a$  y un punto  $P$  en  $a$ .
  - c) Dibuje las dos semirrectas  $b$  y  $c$  de origen  $P$  sobre  $a$ . Píntelas de rojo y azul.
  - d) Dibuje un punto  $Q$  fuera de  $a$ .
  - e) Trace la semirrecta  $d = PQ$ .
  - f) Trace una semirrecta  $e$  del mismo lado de  $d$  con respecto a  $a$  tal que  $\angle (b, e) \equiv \angle (c, d)$ .
  - g) Dibuje el punto  $Q'$  sobre  $e$  tal que  $PQ \equiv PQ'$ .
  - h) Si  $Q \neq Q'$  tome  $M$  el punto medio de  $QQ'$ , si no  $M = Q$ .
  - i) Muestre que  $f = MP$  es una perpendicular a  $a$  por  $P$  (sugerencia: use la proposición 187 y el teorema 151).
5. Para probar la *unicidad* de la perpendicular por un *punto de una recta*, use el teorema 175.
6. Concluya la prueba.

## 3.5. Relaciones de orden entre segmentos y ángulos

### 3.5.1. Relaciones de orden entre segmentos

**Definición 191.** Dados los segmentos  $AB$  y  $A'B'$ , si en el interior del segmento  $AB$  se encuentra un punto  $C$  tal que

$$AC \equiv A'B'$$

se dice que el segmento  $AB$  es *mayor que* el  $A'B'$  o que  $A'B'$  es *menor que*  $AB$ . Se denota  $AB > A'B'$  o  $A'B' < AB$ .

**Teorema 192. (Tricotomía de orden de segmentos)** *Dados dos segmentos arbitrarios  $AB$  y  $CD$  siempre se cumple alguna de las tres relaciones*

$$AB \equiv CD, AB > CD, AB < CD$$

*y cada una de las opciones excluye a las otras dos.*

**Ejercicio 193.** Demuestre el teorema 192 siguiendo los pasos a continuación.

1. Dibuje una semirrecta  $a = AB$  y un segmento  $b = CD$ .
2. Dibuje un punto  $M$  sobre  $a$ , de tal modo que  $AM \equiv CD$ .
3. Pruebe la existencia de estas relaciones considerando que el punto  $M$  solo tiene tres posiciones posibles:
  - a)  $B$  está entre  $M$  y  $A$ .
    - 1) Pruebe, que en este caso, existe sobre la semirrecta  $CD$  un punto  $N$  tal que  $AB \equiv CN$ .
    - 2) Pruebe que  $N$  está entre  $C$  y  $D$  (sugerencia: use el teorema 138).
    - 3) Muestre que  $AB < CD$ .
  - b)  $B = M$ . Pruebe, que en este caso,  $AB \equiv CD$ .

### 3.5. ORDEN ENTRE SEGMENTOS Y ÁNGULOS

---

- c)  $M$  está entre  $A$  y  $B$ . Pruebe, que en este caso,  $AB > CD$ .
4. Suponga, para reducir el problema al absurdo que  $AB \equiv CD$  y  $AB > CD$ , a la vez.
- a) Muestre que debe haber un punto  $M$  entre  $A$  y  $B$  tal que  $AM \equiv CD$ .
- b) Muestre que sobre la semirrecta  $AB$  hay dos puntos distintos  $M$  y  $B$  tal que  $AM \equiv CD$  y  $AB \equiv CD$ .
- c) Muestre que esto es absurdo.
5. Suponga, para reducir el problema al absurdo, que  $AB < CD$  y  $AB > CD$ , a la vez.
- a) Muestre que debe haber un punto  $N$  entre  $C$  y  $D$  tal que  $CN \equiv AB$ . Dibuje a  $N$ .
- b) Muestre que debe haber un punto  $M$  entre  $A$  y  $B$  tal que  $AM \equiv CD$ . Dibuje a  $M$ .
- c) Muestre que sobre la semirrecta  $AB$  existe un punto  $N'$  tal que  $CN \equiv AN'$ . Dibuje a  $N'$ .
- d) Muestre que  $N'$  está entre  $A$  y  $M$  (sugerencia: use el teorema 138).
- e) Pruebe que  $N'$  está entre  $A$  y  $B$ .
- f) Pruebe que  $N'$  y  $B$  son distintos.
- g) Pruebe que  $AB \equiv AN'$ .
- h) Muestre que sobre la semirrecta  $AB$  hay dos puntos distintos  $N'$  y  $B$  tal que  $AN' \equiv AB$  y  $AB \equiv AB$ .
- i) Muestre que esto es absurdo.
6. Concluya con la demostración.

**Teorema 194.** (*Transitividad de orden de segmentos*) Si  $AB < A'B'$  y  $A'B' < A''B''$ , entonces  $AB < A''B''$ .

**Ejercicio 195.** Pruebe el teorema 194 siguiendo los pasos a continuación.

1. Dibuje tres segmentos  $a = AB$ ,  $b = A'B'$  y  $c = A''B''$  tal que  $AB < A'B'$  y  $A'B' < A''B''$ .
2. Sobre  $c$  dibuje un punto  $B'_1$  de tal modo que  $A''B'_1 \equiv A'B'$ .
3. Sobre  $b$  dibuje un punto  $B_1$  de tal modo que  $A'B_1 \equiv AB$ .
4. Muestre que existe un punto  $B_2$ , sobre la semirrecta  $A''B''$  tal que  $A'B_1 \equiv A''B_2$ .
5. Pruebe que  $B_2$  está entre  $A''$  y  $B'_1$ . Dibuje a  $B_2$ .
6. Muestre que  $B_2$  está en  $c$ .
7. Concluya la prueba.

**Corolario 196.** Si  $AB < A'B'$  y  $A'B' \equiv A''B''$ , entonces  $AB < A''B''$ .

**Ejercicio 197.** Pruebe el corolario 196 siguiendo los pasos a continuación.

1. Suponga para reducir el problema al absurdo que  $AB < A'B'$  y  $A'B' \equiv A''B''$  y  $A''B'' < AB$ .
  - a) Use el teorema 194 para mostrar que  $A''B'' < A'B'$ .
  - b) Concluya que esto contradice el teorema 192.
2. Suponga para reducir el problema al absurdo que  $AB < A'B'$  y  $A'B' \equiv A''B''$  y  $A''B'' \equiv AB$ .
  - a) Use el teorema 136 para mostrar que  $AB \equiv A'B'$ .
  - b) Concluya que esto contradice el teorema 192.
3. Concluya la prueba.

**Corolario 198.** Si los puntos  $C$  y  $D$  están entre  $A$  y  $B$ , entonces  $CD < AB$ .

**Ejercicio 199.** Pruebe el corolario 198 usando el teorema 194.

### 3.5.2. Relaciones de orden entre ángulos

**Definición 200.** Dados  $\widehat{hk}$ ,  $\widehat{h'k'}$ , si existe una semirrecta interior  $l$  del  $\widehat{hk}$ , es decir, si  $l$  está entre  $h$  y  $k$ , tal que

$$\widehat{hl} \equiv \widehat{h'k'}$$

decimos que  $\widehat{hk}$  es mayor que  $\widehat{h'k'}$ , o que  $\widehat{h'k'}$  es menor que  $\widehat{hk}$ .

**Teorema 201. (Tricotomía de orden de ángulos)** *Dados dos ángulos arbitrarios  $\widehat{hk}$ ,  $\widehat{h'k'}$ , siempre se cumple alguna de las tres relaciones*

$$\widehat{hk} \equiv \widehat{h'k'}, \widehat{hk} < \widehat{h'k'}, \widehat{h'k'} < \widehat{hk}$$

*y cada una de las opciones excluye a las otras dos.*

**Ejercicio 202.** Demuestre el teorema 201 siguiendo los pasos a continuación.

1. Dibuje dos ángulos  $\alpha = \widehat{hk}$  y  $\beta = \widehat{h'k'}$  de orígenes  $O$  y  $O'$  respectivamente.
2. Dibuje una semirrecta  $l'$  de origen  $O'$  del mismo lado que  $k'$  con respecto a la prolongación de  $h'$ , tal que  $\alpha = \widehat{h'l'}$ . Muestre que existe  $l'$ .
3. Use la proposición 164 para mostrar que puede darse uno y sólo uno de los casos siguientes:
  - a)  $l' = k'$ .
    - 1) Arrastre la semirrecta  $k$  hasta que  $l'$  y  $k'$  se superpongan.
    - 2) Use el teorema 164 para mostrar en este caso que  $\widehat{hk} \equiv \widehat{h'k'}$ .
  - b)  $l'$  es interior del ángulo  $\widehat{h'k'}$ .
    - 1) Arrastre la semirrecta  $k$  hasta que quede representada esta situación.

- 2) Muestre que, en este caso,  $\widehat{hk} < \widehat{h'k'}$ .
- c)  $k'$  es interior del ángulo  $\widehat{h'l'}$ .
  - 1) Arrastre la semirrecta  $k$  hasta que quede representada esta situación.
  - 2) Dibuje una semirrecta  $l$  de origen  $O$  del mismo lado que  $k$  con respecto a la prolongación de  $h$ , tal que  $\beta = \widehat{hl}$ . Muestre que existe  $l$ .
  - 3) Use el teorema 153 para demostrar que  $l$  es interior a  $\alpha$ .
  - 4) Muestre que, en este caso,  $\widehat{h'k'} < \widehat{hk}$ .
4. Concluya la prueba.

**Teorema 203. (Transitividad de orden de ángulos)** Si  $\widehat{hk} < \widehat{h'k'}$  y  $\widehat{h'k'} < \widehat{h''k''}$ , entonces  $\widehat{hk} < \widehat{h''k''}$ .

**Ejercicio 204.** Pruebe el teorema 203 siguiendo los pasos a continuación.

1. Dibuje tres ángulos  $\alpha = \widehat{hk}$ ,  $\beta = \widehat{h'k'}$  y  $\gamma = \widehat{h''k''}$ , de orígenes  $O$ ,  $O'$  y  $O''$ , respectivamente tal que  $\alpha < \beta$  y  $\beta < \gamma$ .
2. Dibuje una semirrecta  $k'_1$  de origen  $O''$  del mismo lado que  $k''$  con respecto a la prolongación de  $h''$  de tal modo que  $\widehat{h''k'_1} \equiv \beta$ . Muestre que  $k'_1$  es interior a  $\gamma$ .
3. Dibuje una semirrecta  $k_1$  de origen  $O'$  del mismo lado que  $k'$  con respecto a la prolongación de  $h'$  de tal modo que  $\widehat{h'k_1} \equiv \alpha$ . Muestre que  $k_1$  es interior a  $\beta$ .
4. Dibuje una semirrecta  $k_2$  de origen  $O''$  del mismo lado que  $k''$  con respecto a la prolongación de  $h''$  de tal modo que  $\widehat{h''k_2} \equiv \alpha$ .
5. Use el teorema 164 para probar que

$$\alpha \equiv \widehat{h''k_2} \equiv \widehat{h'k_1}$$

### 3.5. ORDEN ENTRE SEGMENTOS Y ÁNGULOS

---

6. Pruebe que  $k_2$  está entre  $h''$  y  $k'_1$  (sugerencia: use el teorema 153).
7. Pruebe  $k_2$  está entre  $h''$  y  $k''$  (sugerencia: use el lema 112).
8. Concluya la prueba.

**Definición 205.** Decimos que un ángulo es *agudo* si es menor que un recto y es *obtuso* si es mayor que un recto.

*Observación 206.* Debido a que todos los ángulos rectos son congruentes y por la transitividad de la relación mayor (o menor) de ángulos, un ángulo obtuso es mayor que cualquier agudo (sugerencia: vea el teorema 203). Además, por la tricotomía de la relación menor, cualquier ángulo es, o bien recto, o bien agudo, o bien obtuso (sugerencia: vea el teorema 201).

**Proposición 207.** *Si dos ángulos son adyacentes, o bien los dos son rectos o bien uno es agudo y el otro es obtuso.*

**Ejercicio 208.** Demuestre la proposición 207 siguiendo los pasos a continuación.

1. Dibuje la recta  $a = AB$ .
2. Marque el punto  $O$  entre  $A$  y  $B$ .
3. Dibuje la semirrecta  $b = OC$  de tal modo que  $\widehat{AOC}$  sea agudo.
4. Trace la perpendicular  $c$  a  $a$  por  $O$ .
5. Marque un punto  $D$  sobre  $c$  del mismo lado de  $a$  que  $C$ .
6. Pruebe que  $b$  es interior de  $\widehat{AOD}$ . (Suponga que  $b$  no es interior de  $\widehat{AOD}$ , entonces debe existir una semirrecta  $b'$  tal que con la semirrecta  $OA$  determine un ángulo congruente con  $\widehat{AOC}$ . Muestre que esto es contradictorio).

7. Pruebe que  $C$  y  $B$  están en distintos semiplanos con respecto a  $c$ .
8. Trace el segmento  $d = CB$ .
9. Pruebe que la semirrecta  $OD$  corta a  $d$ .
10. Concluya la prueba.

### 3.5.3. Lados y ángulos de triángulos

**Teorema 209.** (*Primer teorema del ángulo exterior*) *En cualquier triángulo, un ángulo exterior es mayor que cualquier ángulo interior no adyacente.*

**Ejercicio 210.** Realice la prueba del teorema 209.

1. Trace el triángulo  $ABC$ .
2. Dibuje el punto medio  $D$  del segmento  $AB$ .
3. Trace la circunferencia  $d$  de centro  $D$  que pasa por  $C$ .
4. Trace la recta  $CD = e$ .
5. Marque la segunda intersección  $E$  de  $d$  y  $e$  ¿Cómo es  $CD$  con respecto a  $DE$ ?
6. Oculte  $d$ .
7. Trace los triángulos  $ACD$  y  $BDE$ . Cámbieles el color. Muestre que son congruentes.
8. Trace la recta  $f = CB$  y marque un punto  $F$  cualquiera de tal modo que  $B$  esté entre  $C$  y  $F$ .
9. Muestre que  $E$  está en el mismo semiplano de borde  $f$  que  $A$  y  $D$ .

### 3.5. ORDEN ENTRE SEGMENTOS Y ÁNGULOS

---

10. Muestre que  $E$  está en distinto lado de  $C$  con respecto a la recta  $AB$ .
11. Muestre que la semirrecta  $BE$  es interior al  $\widehat{DBF}$ .
12. Muestre que  $\widehat{CAD} \equiv \widehat{DBE}$  y que  $\widehat{CAD} < \widehat{DBF}$ .
13. Verifique el resultado anterior con la herramienta.
14. Sea  $G$  el punto medio del segmento  $CB$ . Muestre que  $\widehat{ACG} < \widehat{DBF}$  mediante un procedimiento análogo a partir del paso 3.
15. Concluya la prueba.

**Corolario 211.** *En todo triángulo hay por lo menos dos ángulos agudos.*

**Ejercicio 212.** Demuestre el corolario 211, reduciendo el problema al absurdo: suponga que hay un triángulo con dos ángulos no agudos y use el teorema 209 para llegar a una contradicción.

**Definición 213.** Si un triángulo tiene un ángulo recto le decimos *triángulo rectángulo*, si tiene un ángulo obtuso, *obtusángulo* y si tiene todos sus ángulos agudos, *acutángulo*.

**Proposición 214.** *Un triángulo puede ser de uno y sólo uno de los tres tipos siguientes: rectángulo, obtusángulo o acutángulo.*

**Ejercicio 215.** Pruebe la proposición 214 (sugerencia: use el corolario 211).

**Proposición 216.** *Todo triángulo puede descomponerse en dos triángulos rectángulos.*

**Ejercicio 217.** Pruebe la proposición 216 siguiendo los pasos a continuación.

1. Marque tres puntos no alineados  $A$ ,  $B$  y  $C$  y las rectas  $a = BC$ ,  $b = AC$  y  $c = AB$ .

2. Trace la perpendicular  $d$  desde  $A$  a  $a$ . Marque el pie  $D$  de la perpendicular.
3. Arrastre el punto  $A$  hasta que  $B$  esté entre  $D$  y  $C$ .
4. Muestre que el ángulo  $\widehat{ABC}$  debe ser obtuso (sugerencia: use el teorema 209).
5. Muestre que solamente para triángulos obtusángulos dos pies de alturas caen fuera del lado opuesto.
6. Muestre que en los triángulos obtusángulos el pie de la altura correspondiente al ángulo obtuso cae en el interior del lado opuesto a dicho ángulo.
7. Muestre que en los triángulos rectángulos el pie de la altura correspondiente al ángulo recto cae en el interior del lado opuesto a dicho ángulo.
8. Pruebe que en cualquier triángulo al menos uno de los pies de las alturas cae sobre el lado opuesto.
9. Concluya la prueba.

**Teorema 218.** *En un triángulo, a lados mayores se le oponen ángulos mayores y recíprocamente.*

**Ejercicio 219.** Pruebe el teorema 218, mediante los pasos siguientes.

1. Dibuje un triángulo  $ABC$  de tal modo que el lado  $BC$  sea mayor que el lado  $AC$ .
2. Para probar que a lados mayores se le oponen ángulos mayores, siga los pasos a continuación.
  - a) Muestre que existe un punto  $D$  entre  $C$  y  $B$  tal que  $AC \equiv CD$ . Dibuje a  $D$ .
  - b) Trace el segmento  $e = AD$ .

### 3.5. ORDEN ENTRE SEGMENTOS Y ÁNGULOS

---

- c) Pruebe que  $\widehat{BAC} > \widehat{CAD}$ .
- d) Use el teorema 156 para demostrar que  $\widehat{CAD} \equiv \widehat{CDA}$ .
- e) Use el teorema 209 para demostrar que  $\widehat{DBA} < \widehat{CAD}$ .
- f) Pruebe que  $\widehat{DBA} < \widehat{CAB}$ .
- g) Oculte  $D$  y  $e$ .
3. Para probar que a ángulos mayores se le oponen lados mayores, reduzca el problema al absurdo: suponga que, aunque  $\widehat{BAC} > \widehat{ABC}$ ,  $AC > BC$ .
- a) Muestre que  $\widehat{ABC} > \widehat{BAC}$ .
- b) Muestre que esto contradice el teorema 201.
4. Suponga para reducir el problema que, aunque  $\widehat{BAC} > \widehat{ABC}$ ,  $AC = BC$ .
- a) Muestre que  $\widehat{ABC} = \widehat{BAC}$ .
- b) Muestre que esto contradice el teorema 201.
5. Concluya la prueba.

**Corolario 220.** *Sea un triángulo  $ABC$  de lados  $a$ ,  $b$  y  $c$ . Sea  $D$  un punto sobre  $a$ . Entonces el segmento  $AD$  es menor que  $b$  o que  $c$ . Además, si  $ABC$  es obtusángulo en  $B$ ,  $AD$  es mayor que  $c$ .*

**Ejercicio 221.** Demuestre el corolario 220 siguiendo los pasos a continuación.

1. Dibuje un triángulo  $ABC$  y un punto  $D$  en  $a$ .
2. Pruebe que en el triángulo  $ABD$ , al menos uno de los ángulos adyacentes en  $D$  no es agudo (sugerencia: use la proposición 207).

3. Arrastre el punto  $A$  hasta que  $\widehat{ADB}$  sea obtuso. Pruebe, en este caso, que se cumple la primera parte del teorema.
4. Arrastre el punto  $A$  hasta que  $\widehat{ADB}$  sea recto. Pruebe en este caso, que se cumple la primera parte del teorema.
5. Concluya con la primer parte de la prueba.
6. Arrastre el punto  $A$  hasta que  $\widehat{ABD}$  sea obtuso. Pruebe, en este caso, que se cumple la segunda parte del teorema.
7. Concluya la prueba.

**Definición 222.** Un segmento  $AB$  se dice *suma de los segmentos*  $CD$  y  $EF$  si existe un punto  $G$  interior al segmento  $AB$  tal que  $AG \equiv CD$  y  $GB \equiv EF$  y se denota  $CD + EF = AB$ .

**Proposición 223.** *Dados los segmentos*  $AB, CD, A'B'$  y  $C'D'$ , *tales que*  $AB \equiv A'B'$  y  $CD \equiv C'D'$ , *entonces*  $AB + CD \equiv A'B' + C'D'$ .

**Ejercicio 224.** Pruebe la proposición 223 siguiendo los pasos a continuación.

1. Dibuje los segmentos  $a = AB, b = CD, a' = A'B'$  y  $b' = C'D'$  tales que  $a \equiv a'$  y  $b \equiv b'$ .
2. Dibuje las rectas  $e = EF$  y  $f = GH$ .
3. Oculte los puntos  $E, F, G$  y  $H$ .
4. Dibuje sobre  $e$  un punto  $M$  y sobre  $f$  un punto  $M'$ .
5. Marque sobre  $e$  un punto  $P$  tal que  $PM \equiv AB$ .
6. Marque sobre  $f$  un punto  $P'$  tal que  $P'M' \equiv A'B'$ .
7. Marque sobre  $e$  un punto  $Q$  tal que  $QM \equiv CD$  y  $M$  entre  $P$  y  $Q$ .

### 3.5. ORDEN ENTRE SEGMENTOS Y ÁNGULOS

---

8. Marque sobre  $f$  un punto  $Q'$  tal que  $Q'M' \equiv C'D'$  y  $M'$  entre  $P'$  y  $Q'$ .
9. Pruebe que  $PQ$  es una suma de  $AB$  y  $CD$  o sea  $PQ = AB + CD$ .
10. Pruebe que  $P'Q'$  es una suma de  $A'B'$  y  $C'D'$  o sea  $P'Q' = A'B' + C'D'$ .
11. Pruebe que  $QM \equiv Q'M'$  y  $PM \equiv P'M'$  (sugerencia: use el teorema 136).
12. Muestre que  $PQ \equiv P'Q'$  (sugerencia: use el axioma III 3).
13. Concluya la prueba.

**Teorema 225.** (*Propiedad Triangular*) *En un triángulo, el mayor de los lados es menor que una suma de los otros dos.*

**Ejercicio 226.** Pruebe el teorema 225 mediante los pasos siguientes

1. Dibuje un triángulo  $ABC$  de tal modo que el lado  $a = BC$  sea mayor que los otros dos.
2. Dibuje una circunferencia  $d$  con centro en  $C$  que pase por  $A$ .
3. Marque la intersección  $D$  de  $d$  con  $a$ .
4. Oculte  $d$ .
5. Trace el segmento  $e = AD$ .
6. Use el teorema 156 y el corolario 211 para demostrar que  $\widehat{CDA}$  y  $\widehat{DAC}$  son agudos.
7. Muestre que  $\widehat{CDA} < \widehat{BDA}$  (sugerencia: vea la proposición 207).
8. Use el teorema 218 para mostrar que  $BA > BD$  es mayor que  $BD$ .

9. Marque un punto  $E$  sobre la semirrecta  $DB$  tal que  $DE \equiv AB$ . Muestre que  $E$  existe.
10. Pruebe que  $BD < ED$  (sugerencia: use el corolario 196).
11. Muestre que  $B$  está entre  $E$  y  $D$ .
12. Muestre que  $B$  está entre  $E$  y  $C$ .
13. Concluya la prueba.

**Teorema 227.** Sean cuatro puntos  $A, B, C$  y  $C'$  coplanares no alineados de a tres, tales que  $C$  y  $C'$  estén en el mismo lado respecto de la recta  $AB$  y los segmentos  $BC$  y  $BC'$  son congruentes, entonces  $\widehat{ABC} < \widehat{ABC'}$  si y solo si  $AC < AC'$ .

**Ejercicio 228.** Pruebe el teorema 227 siguiendo los pasos a continuación.

1. Dibuje cuatro puntos en las condiciones del teorema 227.
2. Trace los segmentos  $a = BC$ ,  $b = AC$ ,  $c = AB$ ,  $a' = BC'$  y  $b' = AC'$ .
3. Trace la bisectriz  $d$  del  $\widehat{CBC'}$ .
4. Pruebe que  $d$  corta a  $b'$  en un punto  $D$ . Dibuje a  $D$ .
5. Pruebe que  $CD \equiv C'D$ .
6. Pruebe que  $b' = AD + DC$ .
7. Use la propiedad triangular para mostrar que  $b < b'$ .
8. Concluya con la propiedad necesaria.
9. Para probar la condición suficiente suponga que no se cumple que  $\widehat{ABC} < \widehat{ABC'}$ .
  - a) Para el caso  $\widehat{ABC'} < \widehat{ABC}$ , muestre que  $AC' < AC$ .

### 3.5. ORDEN ENTRE SEGMENTOS Y ÁNGULOS

---

b) Para el caso  $\widehat{ABC'} \equiv \widehat{ABC}$ , muestre que  $AC \equiv AC'$ .

10. Concluya con la condición suficiente.

11. Concluya con la prueba.

**Corolario 229.** *Dados dos triángulos  $ABC$  y  $A'B'C'$  tales que  $AB \equiv AB'$  y  $BC \equiv BC'$  entonces  $\widehat{ABC} < \widehat{A'B'C'}$  si y solo si  $AC < A'C'$ .*

**Ejercicio 230.** Pruebe el corolario 229 usando el teorema 227.

**Teorema 231. (Criterio LLA)** *Sean tres puntos  $A, B$  y  $C$  no alineados y tres puntos  $A', B'$  y  $C'$  no alineados. Si  $AB \equiv A'B'$ ,  $BC \equiv B'C'$  y  $\widehat{ACB} \equiv \widehat{A'C'B'}$ , con  $AB > BC$ , entonces  $ABC \equiv A'B'C'$ .*

**Ejercicio 232.** Demuestre el teorema 231 siguiendo los pasos a continuación.

1. Dibuje un triángulo  $ABC$  de tal modo que el lado  $AB > BC$ .
2. Trace la semirrecta  $d = B'D$ .
3. Dibuje un punto  $C'$  en  $d$  tal que  $BC \equiv B'C'$ .
4. Trace una semirrecta  $e$  tal que forme un ángulo con la semirrecta  $C'B'$  congruente con  $\widehat{ACB}$ .
5. Trace una circunferencia  $f$  de centro  $B'$  y radio congruente a  $BA$ .
6. Marque la intersección  $A'$  de  $f$  y  $e$ .
7. Oculte  $f$ .
8. Trace el segmento  $g = B'A'$ .
9. Suponga, para reducir el problema al absurdo, que los segmentos  $A'C'$  y  $AC$  no son congruentes.

- a) Pruebe que sobre la semirrecta  $e$  debe existir un punto  $A'' \neq A'$  tal que  $A''C' \equiv AC$ .
- b) Pruebe que los triángulos  $A''B'C'$  y  $ABC$  son congruentes.
- c) Pruebe que el triángulo  $A'BA''$  es isósceles.
- d) Muestre que el ángulo  $\widehat{B'A'C'}$  es obtuso.
- e) Pruebe que esto lleva a una contradicción con el teorema 218.

10. Concluya la prueba.

## 3.6. Perpendicularidad en el espacio

### 3.6.1. Planos y rectas perpendiculares

**Definición 233.** Una recta  $r$  es *perpendicular a un plano*  $\pi$ , si  $r$  y  $\pi$  son secantes en el punto  $P$  y todas las rectas  $s$  que están en  $\pi$  y que pasan por  $P$  son perpendiculares a  $r$ .

**Teorema 234.** Una recta  $r$  es perpendicular a un plano  $\pi$  si y sólo si es secante a  $\pi$  y perpendicular a dos rectas distintas que están en  $\pi$ .

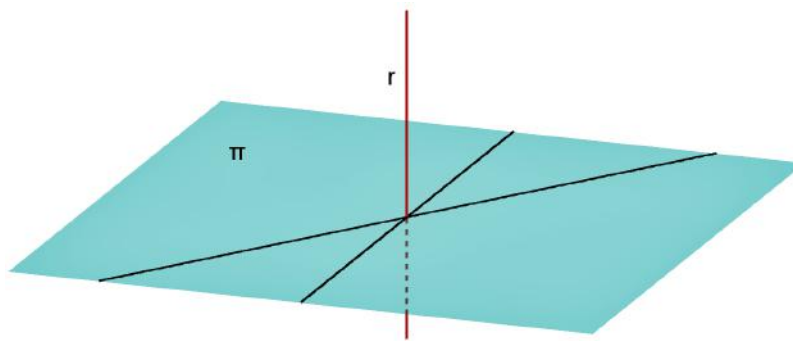


Figura 3.6.1: Recta perpendicular a un plano

**Ejercicio 235.** Pruebe el teorema 234 siguiendo los pasos a continuación.

1. Abra una hoja de GeoGebra y elija vista 3D y oculte los ejes coordenados.
2. Sobre el plano  $xy$  dibuje tres puntos no alineados  $A$ ,  $B$  y  $C$ .
3. Dibuje las rectas  $a = AC$  y  $b = AB$ .
4. Dibuje una recta  $c$  perpendicular al plano  $xy$  por  $A$ . (Supondremos en esta primera parte que solamente sabemos que  $c$  es perpendicular a  $a$  y a  $b$  y probaremos que es perpendicular a cualquier otra recta del plano  $xy$  que pasa por  $A$ . La proposición *directa* es evidente en virtud de la definición).
5. Sobre  $c$  dibuje un punto  $D \neq A$ .
6. Trace el segmento  $d = CB$ .
7. Marque un punto  $E$  en el interior del ángulo  $\widehat{BAC}$ .
8. Trace una recta  $e = AE$ . Píntela de rojo.
9. Marque el punto  $F$  de corte de  $d$  y  $e$ .
10. Marque a  $D'$  simétrico de  $D$  con respecto a  $A$ .
11. Trace los segmentos  $f = DB$  y  $g = D'B$ . Píntelos de azul.
12. Pruebe que los triángulos  $DBA$  y  $D'BA$  son congruentes.
13. Pruebe los segmentos  $f$  y  $g$  son congruentes.
14. Trace los segmentos  $h = DC$  y  $i = D'C$ . Píntelos de rojo.
15. Pruebe que los triángulos  $DCA$  y  $D'CA$  son congruentes.
16. Pruebe que los segmentos  $h$  y  $i$  son congruentes.
17. Pruebe que los triángulos  $DBC$  y  $D'BC$  son congruentes.

18. Pruebe que los ángulos  $\widehat{DBC}$  y  $\widehat{D'BC}$  son congruentes.
19. Trace los segmentos  $j = DF$  y  $k = D'F$ . Píntelos de verde.
20. Pruebe que los triángulos  $DBF$  y  $D'BF$  son congruentes.
21. Pruebe que los segmentos  $j$  y  $k$  son congruentes.
22. Pruebe que los triángulos  $DFA$  y  $D'FA$  son congruentes.
23. Pruebe que los ángulos  $\widehat{DAF}$  y  $\widehat{D'AF}$  son congruentes. Márquelos.
24. Concluya la prueba.

**Teorema 236.** *Por un punto  $P$  exterior a un plano  $\pi$  pasa una perpendicular a  $\pi$ .*

**Ejercicio 237.** Pruebe el teorema 236 siguiendo los pasos a continuación.

1. Abra una hoja de GeoGebra y elija vista 3D y oculte los ejes coordenados.
2. Considere al plano  $xy$  como el plano  $\pi$  y marque un punto  $P$  que no esté en  $\pi$ .
3. Trace la recta  $a = AB$  en  $\pi$ .
4. Trace la perpendicular  $b$  a la recta  $a$  por el punto  $P$ .
5. Marque el corte  $C$  de  $a$  con  $b$ .
6. Trace la recta  $c$  perpendicular a  $a$  por  $C$  en el plano  $xy$ .
7. Trace la perpendicular  $d$  a  $c$  por  $P$ .
8. Marque el pie  $H$  de la perpendicular desde  $P$  a  $c$ .
9. Marque a  $P'$  simétrico de  $P$  con respecto a  $H$ .

### 3.6. PERPENDICULARIDAD EN EL ESPACIO

---

10. Trace los segmentos  $e = PC$  y  $f = P'C$ . Píntelos de azul.
11. Pruebe que el plano determinado por  $P$ ,  $C$  y  $H$  es perpendicular a  $a$ .
12. Pruebe que  $f$  es perpendicular a  $a$ .
13. Pruebe que los triángulos  $PCH$  y  $P'CH$  son congruentes.
14. Pruebe que los segmentos  $e$  y  $f$  son congruentes.
15. Suponga que  $B \neq C$ . Trace los segmentos  $g = PB$  y  $h = P'B$ . Píntelos de rojo.
16. Pruebe que los triángulos  $PCB$  y  $P'CB$  son congruentes.
17. Pruebe los segmentos  $g$  y  $h$  son congruentes.
18. Trace el segmento  $i = HB$ .
19. Pruebe que los triángulos  $PHB$  y  $P'HB$  son congruentes.
20. Concluya la prueba.

**Teorema 238.** *Por un punto  $P$  de un plano  $\pi$  pasa una perpendicular a  $\pi$ .*

**Ejercicio 239.** Pruebe el teorema 238 siguiendo los pasos a continuación.

1. Abra una hoja de GeoGebra y elija vista 3D. Oculte los ejes coordenados.
2. Dibuje dos puntos  $P$  y  $A$  en el plano  $xy$ .
3. Marque un punto  $Q$  fuera del plano  $\pi = xy$ .
4. Dibuje la recta  $a = AP$ .

5. Trace la perpendicular  $b$  a la recta  $a$  en el plano  $APQ$  por el punto  $P$ , escribiendo en la barra de entrada de comandos  $Perpendicular[P, a, Plano[Q, a]]$ .
6. Trace la perpendicular  $c$  a la recta  $a$  en el plano  $\pi$  por el punto  $P$ , escribiendo en la barra de entrada de comandos  $Perpendicular[P, a, Plano[(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0)]]$ .
7. Pruebe que la recta  $a$  es perpendicular al plano determinado por  $b$  y  $c$ .
8. Trace la perpendicular  $d$  a la recta  $c$ , en el plano determinado por  $b$  y  $c$ , por el punto  $P$  escribiendo en la barra de entrada de comandos  $Perpendicular[P, c, Plano[b, c]]$ .
9. Concluya la demostración.

**Teorema 240.** *Por un punto  $P$  cualquiera pasa una única recta  $r$  perpendicular a un plano  $\pi$  dado.*

**Ejercicio 241.** Pruebe el teorema 240 (sugerencia: para probar la existencia use los teoremas 236 y 238. Para la unicidad plantee la reducción al absurdo y la proposición 189).

**Proposición 242.** *Si una recta  $a$  está en un plano que es perpendicular a la recta  $b$ , la recta  $b$  está en un plano que es perpendicular a la recta  $a$ .*

**Ejercicio 243.** Pruebe la proposición 242 siguiendo los pasos a continuación.

1. Abra una hoja de GeoGebra y elija vista 3D.
2. Dibuje tres puntos no alineados  $A$ ,  $B$  y  $C$  en el plano  $xy$ .
3. Trace la recta  $a = AB$ .
4. Oculte los puntos  $A$  y  $B$ .

### 3.6. PERPENDICULARIDAD EN EL ESPACIO

---

5. Trace la recta  $b$  perpendicular al plano  $xy$  por el punto  $C$ .
6. Trace la perpendicular  $c$  a  $a$  por  $C$ . Píntela de rojo.
7. Marque un punto  $D$  en  $b$  distinto de  $C$ .
8. Marque la intersección  $E$  de  $c$  con  $a$ .
9. Marque un punto  $F$  en  $a$  distinto de  $E$ .
10. Dibuje el simétrico  $F'$  de  $F$  con respecto a  $E$ .
11. Pruebe que las rectas  $FC$  y  $F'C$  son perpendiculares a  $b$ .
12. Muestre que los triángulos  $FEC$  y  $F'EC$  son congruentes.
13. Pruebe que los segmentos  $d = FC$  y  $e = F'C$  son congruentes. Dibújelos.
14. Muestre que los triángulos  $FDC$  y  $F'DC$  son congruentes.
15. Pruebe que los segmentos  $f = FD$  y  $g = F'D$  son congruentes. Dibújelos.
16. Muestre que los triángulos  $FED$  y  $F'ED$  son congruentes.
17. Dibuje el segmento  $h = ED$ .
18. Pruebe que los ángulos  $\widehat{DEF}$  y  $\widehat{DEF'}$  son rectos.
19. Dibuje el plano  $i$  que pasa por los puntos  $D, E, C$ .
20. Concluya la prueba.

**Definición 244.** Dos rectas son *ortogonales* si existe un plano que pasa por una de ellas y es perpendicular a la otra.

**Proposición 245.** *Por cada punto pasa un único plano perpendicular a una recta dada.*

**Ejercicio 246.** Pruebe la proposición 245 siguiendo los pasos a continuación.

1. Para probar la existencia:

- a) Abra una hoja de GeoGebra en la vista 3D. Oculte el plano  $xy$  y los ejes coordenados.
- b) Trace un punto  $P$  y una recta  $a$  que no pase por  $P$ .
- c) Trace la perpendicular  $b$  a  $a$  desde  $P$ . Al pie llámele  $H$ .
- d) Marque un punto  $A$  cualquiera sobre  $a$  distinto de  $H$ .
- e) Trace el plano  $c$  que pasa por los puntos  $A$ ,  $P$  y  $H$ .
- f) Dibuje la perpendicular  $d$  a  $c$  por  $H$ .
- g) Marque un punto  $B$  en  $d$  distinto de  $H$ .
- h) Trace el plano  $e$  que pasa por  $P$ ,  $H$  y  $B$ .
- i) Pruebe que  $e$  es perpendicular a  $a$ . (Con esto hemos probado la existencia)

2. Para probar la unicidad:

- a) Abra otra hoja de GeoGebra en la vista 3D. Oculte los ejes cartesianos.
- b) Marque un punto  $O$  en el plano  $xy$  y trace una perpendicular  $a$  al plano  $xy$  por  $O$ .
- c) Marque un punto  $P$  en el plano  $xy$  distinto de  $O$ .
- d) Tome un punto  $A$  fuera de  $a$  y del plano  $xy$ .
- e) Trace el plano  $b$  que pasa por  $A$ ,  $O$ ,  $P$ .
- f) Suponga, para reducir el problema al absurdo, que los planos  $xy$  y  $b$  que pasan por  $O$  y por  $P$ , son perpendiculares a  $a$ .
  - 1) Trace el plano  $c$  que pasa por  $a$  y por  $A$ .
  - 2) Trace la recta  $d$  intersección de los planos  $xy$  y  $c$  y la recta  $e$  intersección de los planos  $b$  y  $c$ .

- 3) Pruebe que las rectas  $d$  y  $e$  son distintas y perpendiculares a  $a$  por  $O$ .
  - 4) Concluya que esto lleva a un absurdo.
3. Concluya la prueba.

### 3.6.2. Planos perpendiculares

**Definición 247.** Una recta  $r$  y dos semiplanos no coplanares  $\alpha$  y  $\beta$  de borde  $r$  determinan un *diedro*. A  $r$  le llamamos *arista* del diedro y a  $\alpha$  y  $\beta$  *caras* del diedro.

**Teorema 248.** Sea un diedro  $\alpha$  de arista  $r$ , entonces todos los ángulos determinados por el corte de  $\alpha$  con un plano perpendicular a la arista son congruentes.

**Ejercicio 249.** Para demostrar el teorema 248 siga los pasos a continuación.

1. Abra una hoja de Geogebra en la vista 3D.
2. Dibuje dos planos distintos  $\alpha$  y  $\beta$  que se cortan en la recta  $r$ .
3. Dibuje dos puntos  $A$  y  $A'$  en  $r$ .
4. Dibuje un plano  $\gamma$  perpendicular a  $r$  por  $A$  y un plano  $\delta$  perpendicular a  $r$  por  $A'$ .
5. Marque la recta  $f$  de corte de  $\alpha$  con  $\gamma$ , la recta  $g$  de corte de  $\beta$  con  $\gamma$ , la recta  $h$  de corte de  $\alpha$  con  $\delta$  y la recta  $k$  de corte de  $\beta$  con  $\delta$ .
6. Tome uno de los cuatro diedros determinados por  $\alpha$  y  $\beta$ , y llamele  $\epsilon$ .
7. Sobre la semirrecta de  $f$  en  $\epsilon$ , marque un punto  $B$ .
8. Sobre la semirrecta de  $g$  en  $\epsilon$ , marque un punto  $C$  de modo que el segmento  $AC$  sea congruente con el segmento  $AB$ .

### CAPÍTULO 3. CONGRUENCIA

---

9. Sobre la semirrecta de  $h$  en  $\epsilon$ , marque un punto  $B'$  de modo que el segmento  $AB'$  sea congruente con el segmento  $AB$ .
10. Sobre la semirrecta de  $k$  en  $\epsilon$ , marque un punto  $C'$  de modo que el segmento  $AC'$  sea congruente con el segmento  $AB$ .
11. Trace los segmentos  $AB'$ ,  $BA'$ ,  $AC'$  y  $CA'$ . Píntelos de rojo (vea la figura 3.6.2)
12. Pruebe que los triángulos  $ABA'$ ,  $A'B'A$ ,  $ACA'$  y  $AC'A'$  son congruentes.
13. Muestre que los segmentos  $AB'$ ,  $BA'$ ,  $AC'$  y  $CA'$  son congruentes.
14. Pruebe que existe un punto  $P$  de corte de los segmentos  $AB'$  y  $BA'$ .
15. Pruebe que existe un punto  $Q$  de corte de los segmentos  $AC'$  y  $CA'$ .
16. Trace el segmento  $PQ$ .
17. Pruebe que los triángulos  $APA'$  y  $AQA'$  son isósceles y congruentes entre sí.
18. Pruebe que los ángulos  $\widehat{PAQ}$  y  $\widehat{PA'Q}$  son congruentes.
19. Pruebe que los triángulos  $BA'C$  y  $B'AC'$  son isósceles y congruentes entre sí.
20. Pruebe que los segmentos  $BC$  y  $B'C'$  son congruentes.
21. Pruebe que los triángulos  $BAC$  y  $B'A'C'$  son isósceles y congruentes entre sí.
22. Concluya la prueba.

**Definición 250.** Al ángulo de corte de un diedro con un plano perpendicular a la arista lo llamamos *sección normal del diedro* o *sección recta del diedro* (figura 3.6.2)

*Observación 251.* En virtud del teorema 248, todas las secciones rectas de un diedro dado son congruentes. Por esto, con cierto abuso de lenguaje nos permitimos decir *la sección recta de un diedro*.

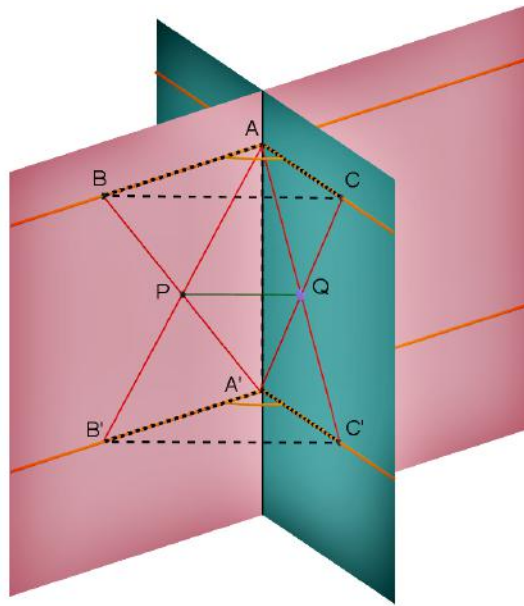


Figura 3.6.2: Congruencia de secciones normales de un diedro

**Definición 252.** Un diedro es *recto* si su sección recta es un ángulo recto. Dos planos son perpendiculares si determinan un diedro recto.

*Observación 253.* Se concluye fácilmente que dos planos son perpendiculares si uno tiene una recta que es perpendicular al otro.

### 3.7. Isometría

**Definición 254.** Una función inyectiva entre conjuntos de puntos del mismo espacio se dice *isometría* si para cualquier par de puntos

distintos  $A$  y  $B$  y sus imágenes  $A'$  y  $B'$ , se tiene que  $AB \equiv A'B'$ . En general, salvo que se indique otra cosa, el dominio e imagen de una isometría es el conjunto de puntos del espacio. A las isometrías también las llamamos *movimientos*.

*Observación 255.* Aunque las isometrías se definen para conjuntos de puntos, usamos expresiones como *las rectas se transforman en rectas* para indicar que el conjunto de puntos de una recta se transforma en el conjunto de los puntos de otra recta, y lo mismo para planos, segmentos, etc. A los puntos que se corresponden en un movimiento solemos llamar *coincidentes bajo la superposición*.

### Propiedades de las isometrías

**Proposición 256.** *Los movimientos preservan la alineación de los puntos.*

**Ejercicio 257.** Muestre la proposición 256, mediante los pasos siguientes:

1. Trace la recta  $a = AB$ .
2. Dibuje  $C$  sobre  $a$ , tal que  $B$  esté entre  $A$  y  $C$ .
3. Suponga, para reducir el problema al absurdo, que los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$  se transforman en puntos no alineados  $A'$ ,  $B'$  y  $C'$  respectivamente.
  - a) Dibuje  $A'$ ,  $B'$  y  $C'$ .
  - b) Pruebe que  $AB + BC = AC$ .
  - c) Pruebe que  $A'B' + B'C' > A'C'$  (sugerencia: use el teorema 225).
  - d) Muestre que  $AB + BC \equiv A'B' + B'C'$  (sugerencia: use la proposición 223).
  - e) Concluya que esto es contradictorio.

4. Concluya la prueba.

**Proposición 258.** Sean  $A$ ,  $B$  y  $C$  puntos no alineados y sean  $A'$ ,  $B'$  y  $C'$  la imagen de  $A$ ,  $B$  y  $C$ , respectivamente, a través de un movimiento. Entonces  $A'$ ,  $B'$  y  $C'$  no estarán alineados.

**Ejercicio 259.** Pruebe la proposición 258 (sugerencia: suponga, para reducir el problema al absurdo, que los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$  no alineados, se transforman en los puntos  $A'$ ,  $B'$  y  $C'$  alineados. Aplique la desigualdad triangular).

**Proposición 260.** Sean  $A$ ,  $B$  y  $C$  puntos alineados con  $B$  entre  $A$  y  $C$ ; y sean  $A'$ ,  $B'$  y  $C'$  la imagen de  $A$ ,  $B$  y  $C$  a través de un movimiento. Entonces  $A'$ ,  $B'$  y  $C'$  estarán alineados con  $B'$  entre  $A'$  y  $C'$ . Es decir, los movimientos preservan la relación “estar entre”. Además, si  $A'$ ,  $B'$  y  $C'$  están alineados con  $B'$  entre  $A'$  y  $C'$ ,  $A$ ,  $B$  y  $C$  serán puntos alineados con  $B$  entre  $A$  y  $C$ .

**Ejercicio 261.** Muestre la proposición 260 siguiendo los pasos a continuación.

1. Trace la recta  $a = AB$ .
2. Dibuje  $C$  sobre  $a$ , de tal modo que  $B$  esté entre  $A$  y  $C$ .
3. Suponga, para reducir el problema al absurdo, que los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$  se transforman en los puntos  $A'$ ,  $B'$  y  $C'$ , de tal modo que  $C'$  esté entre  $A'$  y  $B'$ .
  - a) Trace la recta  $a' = A'B'$ .
  - b) Dibuje  $C'$  sobre  $a'$ , de acuerdo a la suposición.
  - c) Pruebe que nos queda que

$$AB < AC \quad (3.7.1)$$

y

$$A'C' < A'B' \quad (3.7.2)$$

d) Pruebe que de las desigualdades 3.7.1 y 3.7.2 se deduce

$$AB < A'B'$$

e) Concluya que esto es contradictorio.

4. Concluya la prueba.

**Corolario 262.** *Las rectas se transforman en rectas por un movimiento.*

**Ejercicio 263.** Muestre el corolario 262 siguiendo los pasos a continuación.

1. Trace la recta  $a = AB$  y un punto  $A'$ .
2. Trace un segmento  $b = A'B'$  tal que  $AB \equiv A'B'$ . Suponga que los puntos  $A'$  y  $B'$  son los transformados de  $A$  y  $B$ , respectivamente, a través de una congruencia  $\mu$ .
3. Dibuje la recta  $c' = A'B'$ .
4. Pruebe que todos los puntos de  $a$  se transforman en puntos de  $c'$  por  $\mu$  (sugerencia: use la proposición 256).
5. Para mostrar que todo punto de  $c'$  es imagen de algún punto de  $a$ , dibuje un punto  $Y$  sobre  $c'$ .
6. Suponga que  $Y$  está entre  $A'$  y  $B'$ .
  - a) Muestre que existe en la semirrecta  $AB$  un punto  $X$  de tal modo que  $AX \equiv A'Y$ . Dibuje a  $X$ .
  - b) Muestre que  $X$  está entre  $A$  y  $B$ .
  - c) Sea  $X' = \mu(X)$ . Pruebe que  $X'$  está entre  $A'$  y  $B'$ .
  - d) Pruebe que  $X' = Y$ .
7. Considere los casos  $A'$  entre  $Y$  y  $B'$ , y  $B'$  entre  $A'$  y  $Y$ .

8. Concluya la prueba.

**Corolario 264.** *Las semirrectas se transforman por movimiento en semirrectas y su origen en el origen de la transformada. Además, la opuesta de una semirrecta se transforma por un movimiento en la semirrecta opuesta de la transformada.*

**Ejercicio 265.** Pruebe el corolario 264 siguiendo los pasos a continuación.

1. Dibuje una semirrecta  $a = AB$  y un punto  $A'$ .
2. Con la herramienta “Segmento de longitud dada” trace un segmento  $b = A'B'$  tal que  $AB \equiv A'B'$ . Suponga que los puntos  $A'$  y  $B'$  son los transformados de  $A$  y  $B$  a través de una congruencia  $\mu$ .
3. Dibuje la semirrecta  $c' = A'B'$ .
4. Dibuje un punto  $X$  sobre  $a$ .
5. Pruebe que  $\mu(X) = Y$  debe estar sobre la recta  $A'B'$ .
6. Para probar que  $Y$  está sobre la semirrecta  $c'$ , suponga, para reducir el problema al absurdo, que no es así, o sea suponga que  $Y$  está sobre la semirrecta opuesta a  $c'$ . Pruebe que esto es contradictorio con la proposición 260.
7. Para mostrar que todo punto  $Y$  de  $c'$  procede de un punto  $Z$  de  $a$ , suponga para reducir el problema al absurdo que  $Z$  está en la semirrecta opuesta a  $a$ . Pruebe que esto es contradictorio con la proposición 260.
8. Para mostrar que todo punto  $X$  de la semirrecta opuesta a  $a$  se transforma por  $\mu$  en un punto  $Y$  de la semirrecta opuesta a  $c'$ , suponga para reducir el problema al absurdo que  $Y$  está en  $c'$ . Pruebe que esto es contradictorio con las conclusiones anteriores.

9. Para mostrar que todo punto  $Y$  de la semirrecta opuesta a  $c'$  procede de un punto  $Z$  de la semirrecta opuesta de  $a$ , suponga para reducir el problema al absurdo que  $Z$  está en  $a$ . Pruebe que esto es contradictorio con las conclusiones anteriores.
10. Concluya la prueba.

**Corolario 266.** *Los segmentos se transforman por un movimiento en segmentos y sus extremos se transforman en extremos del segmento transformado.*

**Ejercicio 267.** Pruebe el corolario 266 (sugerencia: adecue la prueba de corolario 264).

**Proposición 268.** *Sean  $A$ ,  $B$  y  $C$  puntos no alineados y sean  $A'$ ,  $B'$  y  $C'$ , respectivamente, la imagen de  $A$ ,  $B$  y  $C$  a través de un movimiento. Entonces  $\widehat{ABC} \equiv \widehat{A'B'C'}$ .*

**Ejercicio 269.** Pruebe la proposición 268, siguiendo los pasos siguientes.<sup>3</sup>

1. Dibuje dos semirrectas  $a = AB$  y  $b = AC$ .
2. Dibuje dos semirrectas  $a' = A'B'$  y  $b' = A'C'$ , transformadas de  $a$  y  $b$  respectivamente.
3. Arrastre los puntos  $B'$  y  $C'$  hasta que el segmento  $AB$  sea congruente con el  $A'B'$  y  $AC$  sea congruente con el  $A'C'$ .
4. Muestre que el segmento  $BC$  se transforma en el  $B'C'$ .
5. Muestre que los triángulos  $ABC$  y  $A'B'C'$  son congruentes usando el criterio *LLL*.
6. Concluya que el ángulo  $\widehat{ab}$  es congruente con el  $\widehat{a'b'}$ .

---

<sup>3</sup>Una transformación del espacio en sí mismo que preserva la congruencia de ángulos se dice *conforme*. En este caso, las isometrías son transformaciones conformes.

7. Concluya la prueba.

**Corolario 270.** *Los ángulos rectos se transforman por un movimiento en ángulos rectos.*

**Ejercicio 271.** Pruebe el corolario 270.

**Lema 272.** *Los planos se transforman en planos por un movimiento.*

**Ejercicio 273.** Muestre el lema 272 siguiendo los pasos a continuación.

1. Abra una hoja de GeoGebra y elija la vista 3D. Oculte los ejes coordenados.
2. Dibuje sobre el plano  $xy$  tres puntos no alineados  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y una recta  $a = DE$ .
3. Use la herramienta “Rotación axial” para rotar los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$  alrededor de  $a$ ,  $45^\circ$  en sentido antihorario. Aparecerán los puntos  $A'$ ,  $B'$  y  $C'$ .
4. Suponga que los puntos  $A'$ ,  $B'$  y  $C'$  son los transformados por un movimiento  $\mu$  de los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$ . Pruebe que los puntos  $A'$ ,  $B'$  y  $C'$  no están alineados.
5. Trace el plano  $b$  determinado por  $A'$ ,  $B'$  y  $C'$ .
6. Para probar que todos los puntos del plano determinado por los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$  se transforman por  $\mu$  en los puntos del plano determinados por  $A'$ ,  $B'$  y  $C'$ :
  - a) Dibuje un punto  $P$  sobre el plano  $xy$ . Pruebe que la recta determinada por  $P$  y alguno de los puntos  $A$ ,  $B$  o  $C$  corta alguno de los segmentos  $AB$ ,  $BC$  o  $AC$  o bien  $P$  está sobre alguna de las rectas  $AB$ ,  $BC$  o  $AC$  (sugerencia: use el corolario 114).
  - b) Suponga que la recta  $AP$  corta a  $BC$  en un punto  $M$ . Dibuje a  $M$ .

- 1) Sea  $M' = \mu(M)$ . Pruebe que  $M'$  está entre  $B'$  y  $C'$ .  
Dibuje a  $M'$  (Rotando a  $M$  alrededor de  $a$ ).
  - 2) Pruebe que  $M'$  está en  $b$ .
  - 3) Sea  $P' = \mu(P)$ . Pruebe que  $P'$  está en la recta  $A'M'$ .  
Dibuje a  $P'$ .
  - 4) Pruebe que  $P'$  está en  $b$ .
  - c) Muestre que todos los puntos del plano determinado por los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$  se transforman por  $\mu$  en puntos del plano determinado por  $A'$ ,  $B'$  y  $C'$ .
7. Para probar que cualquier punto del plano determinado por  $A'$ ,  $B'$  y  $C'$  proviene por  $\mu$  de un punto del plano determinado por  $A$ ,  $B$  y  $C$ :
- a) Dibuje un punto  $Y$  en el interior del ángulo  $\widehat{A'B'C'}$ .
  - b) Dibuje el segmento  $c = A'C'$  y la semirrecta  $d = B'Y$ .
  - c) Pruebe que existe un punto  $F$  de corte de  $c$  y  $d$ .
  - d) Trace la semirrecta  $e = AC$  y el punto  $G$  sobre  $e$  de tal modo que  $AG \equiv A'F$ .
  - e) Pruebe que  $G$  está entre  $A$  y  $C$ .
  - f) Pruebe que  $e$  se transforma en la semirrecta  $A'C'$  y  $G$  se transforma en  $F$ .
  - g) Trace la semirrecta  $f = BG$  y el punto  $X$  sobre  $f$  de tal modo que  $BX \equiv B'Y$ .
  - h) Pruebe que  $f$  se transforma en  $d$  y  $X$  se transforma en  $Y$ .
  - i) Considere los demás casos para  $Y$ .
8. Concluya la prueba.

**Corolario 274.** *Los semiplanos se transforman por un movimiento en semiplanos y su borde en el borde del transformado. El semiplano opuesto de un semiplano  $\beta$  se transforma por un movimiento en el opuesto del semiplano transformado de  $\beta$ .*

**Ejercicio 275.** Pruebe el corolario 274 (sugerencia: opere análogamente a la prueba del corolario 264)

**Proposición 276.** Sean  $A, B, C$  y  $D$  puntos no coplanares y sean  $A', B', C'$  y  $D'$  la imagen de  $A, B, C$  y  $D$  a través de un movimiento. Entonces  $A', B', C'$  y  $D'$  no serán coplanares.

**Ejercicio 277.** Pruebe la proposición 276 (sugerencia: suponga, para reducir el problema al absurdo, que los puntos  $A, B, C$  y  $D$  que no son coplanares, se transforman en los puntos  $A', B', C'$  y  $D'$  coplanares. Use la prueba del lema 272 para llegar a que se contradice la inyectividad de la isometría)

**Lema 278.** Sea los puntos  $A$  y  $B$ , y el plano  $\alpha$ . Sea un movimiento  $\mu$  y los puntos  $A'$  y  $B'$  y el plano  $\alpha'$ , transformados de  $A, B$  y  $\alpha$ , respectivamente. Si  $A$  y  $B$  están de un mismo lado de  $\alpha$ , entonces  $A'$  y  $B'$  estarán de un mismo lado de  $\alpha'$ . También, si  $A$  y  $B$  están a distinto lado de  $\alpha$ , entonces  $A'$  y  $B'$  estarán a distinto lado de  $\alpha'$

**Ejercicio 279.** Pruebe el lema 278. Recuerde que si un segmento tiene sus extremos en lados distintos de un plano tiene que tener un punto en el plano.

**Corolario 280.** Los semiespacios se transforman por un movimiento en semiespacios y su borde en el borde del transformado. El semiespacio opuesto de un semiespacio  $\beta$  se transforma por un movimiento en el opuesto del semiespacio transformado de  $\beta$ .

**Ejercicio 281.** Pruebe el corolario 280 (sugerencia: opere análogamente a la prueba del corolario 274).

**Lema 282.** Una recta  $a$  perpendicular al plano  $\alpha$  por un punto  $P$ , se transformará por un movimiento en una recta  $a'$  perpendicular a un plano  $\alpha'$  por un punto  $P'$ , donde  $\alpha'$  es el plano transformado de  $\alpha$  y  $P'$  es el transformado de  $P$ .

**Ejercicio 283.** Muestre el lema 282 siguiendo los pasos a continuación.

1. Abra una hoja de GeoGebra y elija la vista 3D. Oculte los ejes coordenados.
2. Escriba en la barra de comandos  $P = (3, 3, 3)$ .
3. Trace la perpendicular al plano  $xy$  por el punto  $P$ . Dibuje el punto  $A$  pie de la perpendicular por  $P$ .
4. Dibuje los puntos  $B$  y  $C$  no alineados con  $A$  sobre el plano  $xy$ .
5. Trace la recta  $d = DE$  en el plano  $xy$ .
6. Rote los puntos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $P$  alrededor de  $d$ ,  $45^\circ$  en sentido antihorario. Aparecerán los puntos no coplanares  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  y  $P'$ . Suponga que este es el movimiento que se trata.
7. Pruebe que  $\widehat{B'A'P'}$  y  $\widehat{C'A'P'}$  son rectos.
8. Concluya la prueba.

**Teorema 284.** *Las isometrías son sobreyectivas.*

**Ejercicio 285.** Muestre el teorema 284 siguiendo los pasos a continuación.

1. Abra una hoja de GeoGebra y elija la vista 3D. Oculte los ejes coordenados.
2. Suponga  $\mu$  una isometría cualquiera y que los puntos primados son imagen a través de  $\mu$  de los puntos sin primar. Sea  $\alpha$  el plano  $xy$ .
3. Dibuje sobre  $\alpha$  tres puntos no alineados  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y una recta  $a = DE$ .
4. Marque un punto  $F$  que no esté en  $\alpha$ .
5. Rote los puntos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $F$ , alrededor de  $a$ ,  $45^\circ$  en sentido antihorario. Aparecerán los puntos no alineados  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  y  $F'$ .

6. Trace el plano  $\alpha'$  determinado por  $A'$ ,  $B'$  y  $C'$ .
7. Marque un punto  $Y'$  cualquiera del mismo lado que  $F'$  con respecto a  $\alpha'$ . Dibuje a  $Y' = (0, 0, 5)$ .
8. Muestre que la preimagen de  $Y'$  (si existe) debería estar del mismo lado que  $F$  (sugerencia: vea el lema 278).
9. Trace la perpendicular  $b$  a  $\alpha'$  desde  $Y'$ . Marque el pie  $G'$  de la perpendicular. Muestre que  $G'$  existe y es único.
10. Muestre que existe un único punto  $G$  que está sobre  $\alpha$  tal que le corresponde  $G'$  a través de  $\mu$  (sugerencia: use el lema 272).
11. Rote al punto  $G'$ , alrededor de  $a$ ,  $45^\circ$  en sentido horario. Aparecerá un punto  $G''$ . Renombre a  $G''$  a  $G$ .
12. Marque la perpendicular  $c$  a  $\alpha$  por  $G$ .
13. Muestre que la transformada de  $c$  por  $\mu$  debe ser  $b$  (sugerencia: vea el lema 282)
14. Trace el segmento  $d = Y'G'$ .
15. Sobre  $c$  trace un punto  $Y$  de tal modo que  $GY \equiv G'Y' = d$ , que esté del mismo lado de  $\alpha$  que  $F$ .
16. Pruebe que el transformado de  $Y$  por  $\mu$  es  $Y'$ .
17. Concluya la prueba.

**Corolario 286.** *Las isometrías admiten inversa y la inversa es una isometría.*

**Ejercicio 287.** Pruebe el corolario 286 (sugerencia: use los teoremas 284 y 136)

**Teorema 288.** Sean  $M, N, P, Q$  cuatro puntos no coplanares de una figura  $\Omega$  (o sea de un conjunto de puntos); sean  $M'$  un punto arbitrario,  $a$  una recta que pasa por  $M'$ , y  $\alpha$  un plano que pasa por  $a$ . Entonces  $\Omega$  puede moverse de tal manera que  $M$  coincida con  $M'$ ,  $N$  se mueva sobre la recta  $a$  a un lado prefijado de  $M'$ ,  $P$  se mueva a un lado prefijado de  $a$ , y  $Q$  se mueva a un lado de  $\alpha$ . Además, este movimiento será único ( figura 3.7.1).

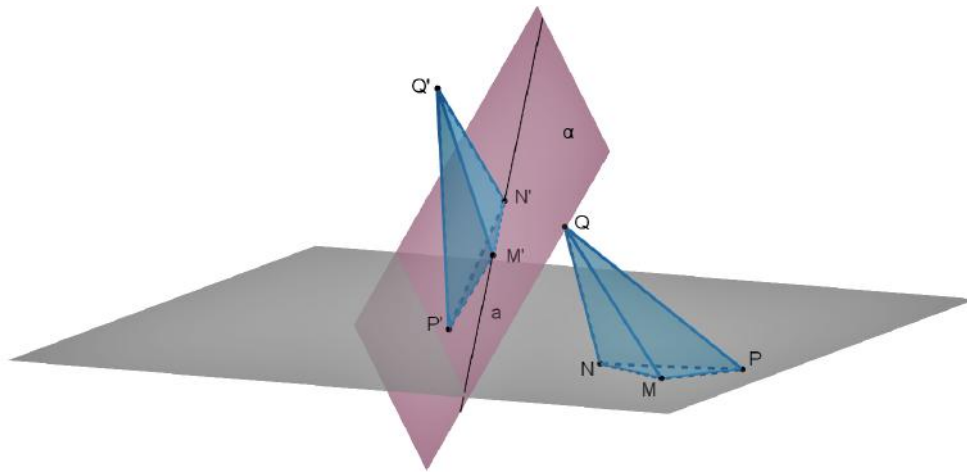


Figura 3.7.1: Movimiento o isometría

**Ejercicio 289.** Demuestre el teorema 288 siguiendo los pasos a continuación.

1. Abra una hoja de GeoGebra y elija la vista 3D. Oculte los ejes coordenados.
2. Dibuje sobre el plano  $xy$  tres puntos no alineados  $M, N, P$ .
3. Dibuje los puntos  $Q$  y  $M'$  fuera de  $xy$ .
4. Trace la recta  $a$  que pase por  $M'$ .
5. Dibuje el plano  $\alpha$  que pase por  $a$  distinto de  $xy$ .

6. Dibuje un punto  $N'$  (aproximadamente, no es relevante la precisión) a un lado cualquiera de  $M'$  sobre la recta  $a$ , tal que  $MN \equiv M'N'$ .
7. Trace la recta  $b = MN$  y sobre  $b$  un punto  $X$ .
8. Defina una función  $\mu_1$  de los puntos de la recta  $b$  en los puntos de la recta  $a$  de la forma siguiente:
  - a) Si el punto  $X$  está en la semirrecta  $MN$ , entonces  $\mu_1(X) = X'$  será el único punto que se encuentra en la semirrecta  $M'N'$  tal que  $MX \equiv M'X'$ .
  - b) Si el punto  $X$  es  $M$ , entonces  $\mu_1(X) = X'$  es  $M'$ .
  - c) Si el punto  $X$  está en la semirrecta opuesta a la  $MN$ , entonces  $\mu_1(X) = X'$  será el único punto que se encuentra en la semirrecta opuesta a la  $M'N'$  tal que  $MX \equiv M'X'$ .
9. Demuestre que  $\mu_1$  está bien definida, es decir, que cada punto de  $b$  tiene una única imagen en  $a$ .
10. Dibuje un punto  $Y$  sobre  $b$ , tal que esté entre  $M$  y  $X$ .
11. Sea  $Y' = \mu_1(Y)$ . Pruebe que  $XY \equiv X'Y'$ .
12. Pruebe que  $\mu_1$  es una isometría sobre los puntos de la recta  $b$ , que envía a  $N$  a  $N'$ .
13. Borre los puntos  $X$  y  $Y$ , dibuje nuevos  $X$  y  $Y$  sobre el lado de  $b$  en el plano  $xy$  donde está  $P$ . Llame a este semiplano  $\beta$ .
14. Dibuje un punto  $P'$  a un lado cualquiera de la recta  $a$  sobre  $\alpha$ , tal que  $MP \equiv M'P'$  y  $\widehat{NMP} \equiv \widehat{N'M'P'}$ . Llame  $\beta'$  a este semiplano.
15. Defina una función  $\mu_2$  de los puntos del plano  $xy$  en los puntos de  $\alpha$  de la forma siguiente:

- a) Si el punto  $X$  está en  $\beta$  entonces  $\mu_2(X) = X'$  será el único punto que se encuentra en  $\beta'$  tal que  $MX \equiv M'X'$  y  $\widehat{NMX} \equiv \widehat{N'M'X'}$ .
- b) Si el punto  $X$  está en  $b$  entonces  $\mu_2(X) = \mu_1(X)$ .
- c) Si el punto  $X$  está en el semiplano opuesto a  $\beta$ , entonces  $\mu_2(X) = X'$  será el único punto que se encuentra en el semiplano opuesto a  $\beta'$ , tal que  $MX \equiv M'X'$  y  $\widehat{NMX} \equiv \widehat{N'M'X'}$ .
16. Demuestre que  $\mu_2$  está bien definida.
17. Sea  $Y' = \mu_2(Y)$ . Pruebe que  $\widehat{YMX} \equiv \widehat{Y'M'X'}$  (sugerencia: use el teorema 153).
18. Pruebe que los triángulos  $NMX$  y  $N'M'X'$  son congruentes.
19. Pruebe que  $XY \equiv X'Y'$ .
20. Pruebe que  $\mu_2$  es una isometría sobre los puntos del plano  $xy$ , que lleva a  $P$  en  $P'$ .
21. Borre los puntos  $X$  y  $Y$ , dibuje nuevos  $X$  y  $Y$  sobre el lado del plano  $xy$  donde ya está  $Q$ . Llame a este semiespacio superior y al opuesto inferior.
22. Trace el punto  $Q_0$ , el único pie de la perpendicular desde  $Q$  al plano  $xy$ .
23. Dibuje un punto  $Q'$  a un lado cualquiera del plano  $\alpha$ , tal que el pie de la perpendicular  $Q'_0 = \mu_2(Q_0)$  y  $Q'Q'_0 \equiv QQ_0$ . Llame  $\gamma'$  a este semiespacio.
24. Sea  $X_0$  el pie de la perpendicular desde  $X$  al plano  $xy$ . Defina una función  $\mu_3$  de los puntos del espacio en si mismo de la forma siguiente:

- a) Si el punto  $X$  está en el semiespacio superior, entonces  $\mu_3(X) = X'$  será el único punto que se encuentra en  $\gamma'$  tal que  $XX_0 \equiv X'X'_0$ , donde  $X'_0$  es el pie de la perpendicular desde  $X'$  al plano  $\alpha$  y  $X'_0 = \mu_2(X_0)$ .
- b) Si el punto  $X$  está en el plano  $xy$ , entonces  $\mu_3(X) = \mu_2(X)$ .
- c) Si el punto  $X$  está en el semiespacio inferior, entonces  $\mu_3(X) = X'$  será el único punto que se encuentra en el semiespacio opuesto a  $\gamma'$  tal que  $XX_0 \equiv X'X'_0$ .
25. Demuestre que  $\mu_3$  está bien definida.
26. Sean  $Y' = \mu_3(Y)$ ,  $Y_0$  el pie de la perpendicular desde  $Y$  al plano  $xy$ , y  $Y'_0 = \mu_2(Y_0)$ . Suponga que  $X$ ,  $X_0$  y  $Y$  no están alineados. Pruebe que  $X'$ ,  $X'_0$  y  $Y'$  no están alineados y que los triángulos  $XX_0Y_0$  y  $X'X'_0Y'_0$  son congruentes.
27. Pruebe que los ángulos  $\widehat{XY_0X_0}$  y  $\widehat{X'Y'_0X'_0}$  son congruentes.
28. Pruebe que los ángulos  $\widehat{XY_0Y}$  y  $\widehat{X'Y'_0Y'}$  son congruentes.
29. Pruebe que los triángulos  $XY_0Y$  y  $X'Y'_0Y'$  son congruentes.
30. Pruebe que  $XY \equiv X'Y'$ .
31. Pruebe que  $\mu_3$  es una isometría, que lleva a  $Q$  sobre  $Q'$ .
32. Para mostrar que  $\mu_3$  es la única isometría posible bajo las hipótesis del teorema, suponga para reducir el problema al absurdo que existe otra isometría  $\nu \neq \mu_3$ .
- a) Pruebe que debe existir un punto  $A$  y dos puntos  $A_1 = \mu_3(A)$  y  $A_2 = \nu(A)$  tal que  $A_1 \neq A_2$ .
- b) Considere los casos siguientes:
- 1)  $A$  está en la semirrecta  $MN$ .

- $a'$  Pruebe que  $A_1$  y  $A_2$  deben estar en la semirrecta  $M'N'$ .
- $b'$  Pruebe que los segmentos  $M'A_1$  y  $M'A_2$  no pueden ser congruentes.
- $c'$  Concluya que esto lleva a un absurdo.
- 2)  $A$  está en la semirrecta opuesta a la  $MN$ .
  - $a'$  Opere como en el caso anterior.
- 3)  $A$  está en el semiplano de  $xy$  donde está  $P$ .
  - $a'$  Pruebe que  $A_1$  y  $A_2$  deben estar en el semiplano de  $\alpha$  donde está  $P'$ .
  - $b'$  Pruebe que los triángulos  $A_1M'N'$  y  $A_2M'N'$  deben ser congruentes.
  - $c'$  Concluya que esto lleva a un absurdo.
- 4)  $A$  está en el semiplano de  $xy$  donde no está  $P$ .
  - $a'$  Opere como en el caso anterior.
- 5)  $A$  está en el semiespacio superior.
  - $a'$  Pruebe que  $A_1$  y  $A_2$  deben estar en el semiespacio de borde  $\alpha$  donde está  $Q'$ .
  - $b'$  Pruebe que  $A_1$ ,  $A_2$  y  $M'$  no pueden estar alineados.
  - $c'$  Abra una hoja de GeoGebra en la vista 3D y oculte los ejes coordenados.
  - $d'$  Dibuje los puntos  $M'$ ,  $N'$  y  $P'$  no alineados sobre el plano  $xy$ .
  - $e'$  Marque dos puntos distintos  $A_1$  y  $A_2$  fuera del plano  $xy$ .
  - $f'$  Trace los segmentos  $a = M'A_1$  y  $b = M'A_2$ . Píntelos de rojo.
  - $g'$  Trace el plano  $c$  que contiene a  $A_1$ ,  $A_2$  y  $M'$ .
  - $h'$  Trace la recta  $d$ , intersección del plano  $xy$  con  $c$ .
  - $i'$  Marque un punto  $B' \neq M'$  sobre  $d$ , tal que  $\widehat{A_2M'B'} < \widehat{A_1M'B'}$ .

- $j'$  Muestre que existe un punto  $B$  tal que  $B' = \mu_3(B)$  y  $B' = \nu(B)$  (observe que  $B'$  está en el plano determinado por  $M', N', P'$ ).
- $k'$  Trace los segmentos  $e = B'A_1$  y  $f = B'A_2$ . Píntelos de azul.
- $l'$  Muestre que  $e$  y  $f$  son congruentes.
- $m'$  Pruebe que los triángulos  $A_1M'B'$  y  $A_2M'B'$  son congruentes.
- $n'$  Muestre que esto lleva a un absurdo.
- 6)  $A$  está en el semiespacio inferior. Opere como en el ítem anterior.
- c) Concluya la prueba por el absurdo.

33. Concluya la prueba.

**Corolario 290. (*Simetría especular*)** Si tres puntos  $M, N$  y  $P$  de la figura  $\Omega$  que no están en una misma recta coinciden con sus puntos correspondientes  $M', N', P'$  de la figura congruente  $\Omega'$ , son posibles dos casos: 1) cada punto de  $\Omega$  coincide con el punto correspondiente de la figura  $\Omega'$ ; 2) Cada punto de la figura  $\Omega$  del plano  $MNP$  coincide con el punto correspondiente de la figura  $\Omega'$ , mientras que los restantes puntos correspondientes de estas figuras se encuentran en lados diferentes con respecto al plano  $MNP$  y cada punto de la figura  $\Omega'$  queda determinado de manera unívoca por la posición del punto correspondiente de la figura  $\Omega$ . (En este caso las figuras se llaman simétricas, o especulares).

**Corolario 291. (*Movimiento Plano*)** Sean  $M, N, P$  tres puntos no colineales de una figura  $\Omega$ ; sean  $M'$  un punto arbitrario del plano  $MNP$ , a una recta que pasa por  $M'$ . Entonces  $\Omega$  puede moverse de tal manera que  $M$  coincida con  $M'$ ,  $N$  se mueva sobre la recta a un lado prefijado de  $M'$ , y  $P$  se mueva a un lado prefijado de  $a$ . Además, este movimiento plano será único.

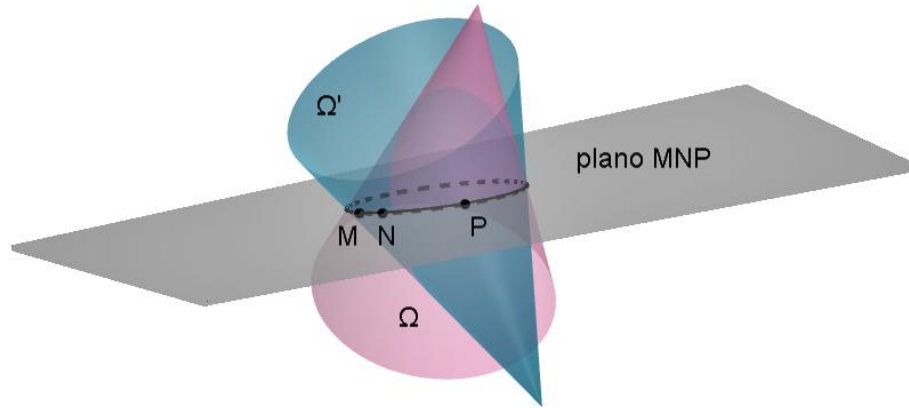


Figura 3.7.2: Simetría especular

**Corolario 292.** (*Simetría axial*) Si dos puntos  $M$  y  $N$  de la figura  $\Omega$  que no están en una misma recta coinciden con sus puntos correspondientes  $M'$  y  $N'$  de la figura congruente  $\Omega'$ , son posibles dos casos: 1) cada punto de  $\Omega$  coincide con el punto correspondiente de la figura  $\Omega'$ ; 2) cada punto de la figura  $\Omega$  de la recta  $MN$  coincide con el punto correspondiente de la figura  $\Omega'$ , mientras que los restantes puntos correspondientes de estas figuras se encuentran en lados diferentes con respecto a la recta  $MN$  y cada punto de la figura  $\Omega'$  queda determinado de manera unívoca por la posición del punto correspondiente de la figura  $\Omega$  (en este caso las figuras se llaman simétricas axiales).

**Corolario 293.** Dada una semirrecta  $a_1$  de origen  $O$  de una recta  $a$ , un plano  $\alpha$  que contiene a  $a$ , un lado  $\alpha_1$  de  $a$  en  $\alpha$  y un lado  $\Omega_1$  de  $\alpha$ ; y una semirrecta  $a'_1$  de origen  $O'$  de una recta  $a'$ , un plano  $\alpha'$  que contiene a  $a'$ , un lado  $\alpha'_1$  de  $a'$  en  $\alpha'$  y un lado  $\Omega'_1$  de  $\alpha'$ , existe un único movimiento que lleva  $a_1$  en  $a'_1$ ,  $\alpha_1$  en  $\alpha'_1$  y  $\Omega_1$  en  $\Omega'_1$ .

**Ejercicio 294.** Pruebe los corolarios 290, 291, 292 y 293 (sugerencia: use el teorema 288).

### Giros y traslaciones

**Definición 295.** El movimiento de una figura, así como de todo el espacio, se llama *giro con respecto a un punto  $O$* , si  $O$  coincide con el punto correspondiente  $O'$ , es decir, si  $O$  es un punto fijo. Al punto  $O$  le llamamos *centro* de la simetría. El movimiento de una figura, así como de todo el espacio, se denomina *giro con respecto a una recta  $a$* , si cada punto de la recta  $a$  coincide con su punto correspondiente, es decir, cada punto de  $a$  queda fijo. A la recta  $a$  le llamamos *eje de giro*.<sup>4</sup>

**Definición 296.** Un movimiento se llama *traslación* a lo largo de la recta  $u$ , si se satisfacen las siguientes tres condiciones:

1. Cada punto de la recta  $u$  se desplaza, quedando sobre la misma recta  $u$ .
2. Cada punto de algún plano  $\alpha$  que contiene la recta  $u$  permanece en dicho plano, al mismo lado de la recta  $u$ .
3. Cada punto que no pertenece a  $\alpha$  permanece al mismo lado de este plano.

*Observación 297.* En el caso de los giros, admitimos la simetría central en el espacio y la simetría especular. La primera se refiere a que un punto y su imagen (salvo el propio centro) determinan un segmento que tiene al centro como punto medio. De mismo modo, la segunda considera un plano fijo e intercambia de semiespacio los otros puntos. Intuitivamente, estas simetrías cambian el sentido de la mano derecha por el de la mano izquierda. También se desprende de la definición dada de giros y traslaciones que la identidad es tanto una traslación como un giro.

**Teorema 298.** *El producto de dos movimientos es un movimiento.*

<sup>4</sup>Note que si hay dos puntos fijos  $A$  y  $B$  en una isometría, es decir, si es tanto un giro con respecto al punto  $A$  como con respecto al punto  $B$ , entonces es un giro con respecto a la recta  $AB$ .

**Ejercicio 299.** Pruebe el teorema 298 (sugerencia: suponga el movimiento  $\mu$  que lleva a los puntos (arbitrarios)  $M$  y  $N$  a los puntos  $M'$  y  $N'$  y el movimiento  $\nu$  a los puntos  $M'$  y  $N'$  a los puntos  $M''$  a  $N''$ . Use el teorema 136 para mostrar que  $MN \equiv M''N''$ , o sea que  $\nu\mu$  es una isometría).

**Teorema 300.** *Los movimientos con la operación binaria de composición tienen la estructura de grupo.*

**Ejercicio 301.** Pruebe el teorema 300 (sugerencia: verifique que el producto de movimientos es efectivamente una operación binaria. Use el teorema 298. Recuerde que la composición de funciones es asociativa. Note que la función identidad es una isometría y que la inversa de una isometría es una isometría. Vea el corolario 286).

**Teorema 302.** *Todo movimiento puede descomponerse en un producto de una traslación y un giro con respecto a un punto.*

**Ejercicio 303.** Pruebe el teorema 302 (sugerencia: sean dos figuras  $\Omega$  y  $\Omega'$  correspondientes a través del movimiento  $\mu$ . Tome un punto  $M$  en  $\Omega$  y sea  $M'$  el correspondiente por  $\mu$ . Sea  $\tau$  la traslación que lleva  $M$  a  $M'$ . Verifique con el teorema 288 que  $\tau$  existe como isometría. Sea  $\Omega''$  la imagen de  $\Omega$  por  $\tau$ . Verifique con el teorema 300 que existe un movimiento que lleva  $\Omega''$  en  $\Omega'$  y que ese movimiento es un giro con respecto a un punto).

# Capítulo 4

## Continuidad

Los axiomas de continuidad nos permiten asignar a cada segmento, de manera única, un número real positivo llamado *longitud del segmento*, a partir de la elección de un segmento unidad (axioma de Arquímedes). Recíprocamente, dichos axiomas, nos permiten determinar la existencia de un segmento cuya longitud sea igual a un número real positivo dado (axioma de Cantor).<sup>1</sup>

### 4.1. Axiomas de continuidad

IV 1 (**Axioma de Arquímedes**) Sean  $AB$  y  $CD$  segmentos arbitrarios. Entonces, sobre la recta  $AB$  existe un número finito de puntos  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , situados de manera que  $A_1$  está entre  $A$  y  $A_2$ ,  $A_2$  está entre  $A_1$  y  $A_3$ , etc., tales que los segmentos  $AA_1, A_1A_2, \dots, A_{n-1}A_n$  son congruentes al segmento  $CD$  y  $B$  está entre  $A$  y  $A_n$ .

IV 2 (**Axioma de Cantor**). Supongamos que en una recta arbitraria  $a$  se da una sucesión infinita de segmentos  $A_1B_1, A_2B_2, \dots$ , de los cuales cada uno está en el interior del precedente; supongamos, además, cualquiera que sea un segmento prefijado,

---

<sup>1</sup>Dependiendo del contexto, usamos la misma notación para un segmento y para su longitud.

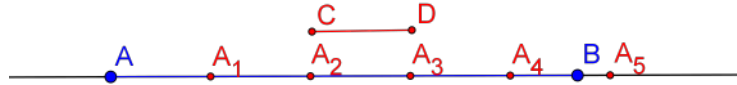


Figura 4.1.1: Axioma de Arquímedes

existe un índice  $n$  para el cual  $A_n B_n$  es menor que este segmento. Entonces, existe sobre la recta  $a$  un punto  $X$  que está en el interior de todos los segmentos  $A_1 B_1, A_2 B_2$ , etc.

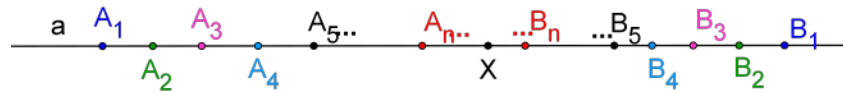


Figura 4.1.2: Axioma de Cantor

**Proposición 304.** *Hay un solo punto que está en el interior de todos los segmentos mencionados en el axioma de Cantor.*

**Ejercicio 305.** Pruebe la proposición 304 suponiendo que hay dos puntos  $X$  y  $Y$ , y muestre que el segmento  $XY$  debería estar en el interior de todos los segmentos lo que contradiría el corolario 198 y el teorema 192.

### Longitud de segmentos

**Definición 306.** llamamos *longitud* a toda función de los segmentos en los números reales positivos que cumple las condiciones siguientes:

- M 1 A segmentos congruentes le corresponden longitudes iguales.
- M 2 Si  $B$  es un punto interior del segmento  $AC$  y a los segmentos  $AB$  y  $BC$  les corresponden las longitudes  $a$  y  $b$  respectivamente, entonces al segmento  $AC$  le corresponde la longitud  $a + b$ .

M 3 Existe un segmento  $OO'$  de longitud 1.

Al segmento  $OO'$  le llamamos *unidad lineal* o *unidad de medida* de longitudes. La notación de la longitud de un segmento  $a = AB$ , es  $|a|$  o  $|AB|$ .

**Lema 307.** *Si un segmento  $a = AB$  es mayor que otro  $a' = A'B'$  entonces  $|a|$  es mayor que  $|a'|$ .*

**Ejercicio 308.** Demuestre el lema 307 siguiendo los pasos a continuación.

1. Dibuje dos segmentos  $a = AB$  y  $a' = A'B'$ , con  $AB > A'B'$ .
2. Muestre que existe un punto  $P$  entre  $A$  y  $B$  tal que  $AP \equiv A'B'$ . Dibújelo.
3. Dibuje los segmentos  $x = AP$  y  $y = PB$ . Píntelos de colores diferentes.
4. Muestre la igualdad numérica

$$|a| = |x| + |y|$$

5. Muestre la igualdad numérica

$$|a| = |a'| + |y|$$

6. Concluya la prueba.

**Proposición 309.** *En todo triángulo la longitud de cualquier lado es menor que la suma de las longitudes de los otros dos y mayor que el módulo de la diferencia de las longitudes de los mismos.*

**Ejercicio 310.** Pruebe la proposición 309 siguiendo los pasos a continuación.

1. Dibuje un triángulo  $ABC$  de tal modo que el lado  $a = BC$  sea mayor que el lado  $b = AC$  y  $c = AB$ .

2. Muestre que  $a < b + c$  (sugerencia: vea el teorema 225).
3. Muestre que  $|a| < |b + c|$  (sugerencia: vea el lema 307).
4. Pruebe que  $|b + c| = |b| + |c|$ .
5. Concluya con la primera afirmación de la proposición 309.
6. Pruebe que  $|a| - |c| < |b|$  y  $|a| - |b| < |c|$ .
7. Pruebe que  $||a| - |c|| < |b|$  y  $||a| - |b|| < |c|$ .
8. Concluya con la segunda afirmación de la proposición 309.
9. Concluya la prueba.

### El proceso de medición

*Observación 311.* El *proceso de medición* es un proceso teórico que considera como entrada un segmento cualquiera y como salida una expresión numérica. Primeramente, suponemos la existencia de un segmento de longitud unidad  $OO_1$ . Sea un segmento cualquiera  $AB$  de longitud  $a$ . El proceso de medición determina puntos  $A_1, A_2, \dots, A_n$  sobre la semirrecta de origen  $A$  que pasa por  $B$ , de tal modo que  $A_i A_{i+1} \equiv OO_1$ , hasta que ocurra algunos de los casos siguientes:

1. Si alguno de los puntos  $A_n$  coincide con  $B$ , el proceso de medición devuelve el número  $n$  y se detiene.
2. Teniendo en cuenta el axioma de Arquímedes, existirán dos puntos  $A_n, A_{n+1}$  de tal modo que  $B$  está entre  $A_n$  y  $A_{n+1}$ . En este último caso, el proceso de medición devolverá  $n$ , pero determinará un punto  $P_1$  que será el punto medio del segmento  $A_n A_{n+1}$ .
  - a) Si  $P_1$  coincide con  $B$ , el proceso se detendrá y devolverá  $n, 1$ . Si no es así, pueden darse dos casos:

- 1)  $B$  estará entre  $A_n$  y  $P_1$ . El procedimiento devolverá  $n, 0$  y llamará  $P_2$  al punto medio del segmento  $A_n P_1$ . Si  $P_2$  coincide con  $B$ , devolverá  $n, 01$  y el proceso se detendrá.
  - 2)  $B$  estará entre  $P_1$  y  $A_{n+1}$ . El procedimiento devolverá  $n, 1$  y llamará  $P_2$  al punto medio del segmento  $P_1 A_{n+1}$ . Si  $P_2$  coincide con  $B$ , devolverá  $n, 11$  y el proceso se detendrá.
- b) El proceso continuará generando una sucesión  $P_1, P_2, \dots$  que puede finalizar o no siguiendo la forma explicada más arriba.

**Lema 312.** *Si existe una función longitud de segmentos, entonces, el entero  $n$  que devuelve el proceso de medición es la parte entera de la longitud de segmento.*

**Ejercicio 313.** Pruebe el lema 312 siguiendo los pasos a continuación.

1. Dibuje dos segmentos  $a = AB$  y  $b = CD$ , tal que  $a$  sea mucho mayor que  $b$  y que  $a$  no se encuentre en posición vertical.
2. Cargue la herramienta para transportar segmentos.
3. En la barra de entrada de comandos escriba:  $n = 0$  y  $ListaA = \{A\}$ .
4. Dibuje los puntos  $E, F$  y  $G$ . Oculte  $E$  y  $G$ .
5. Coloque un botón en algún lugar de la pantalla.
  - a) En la caja de diálogo, en el título coloque *Arquímedes 1*.

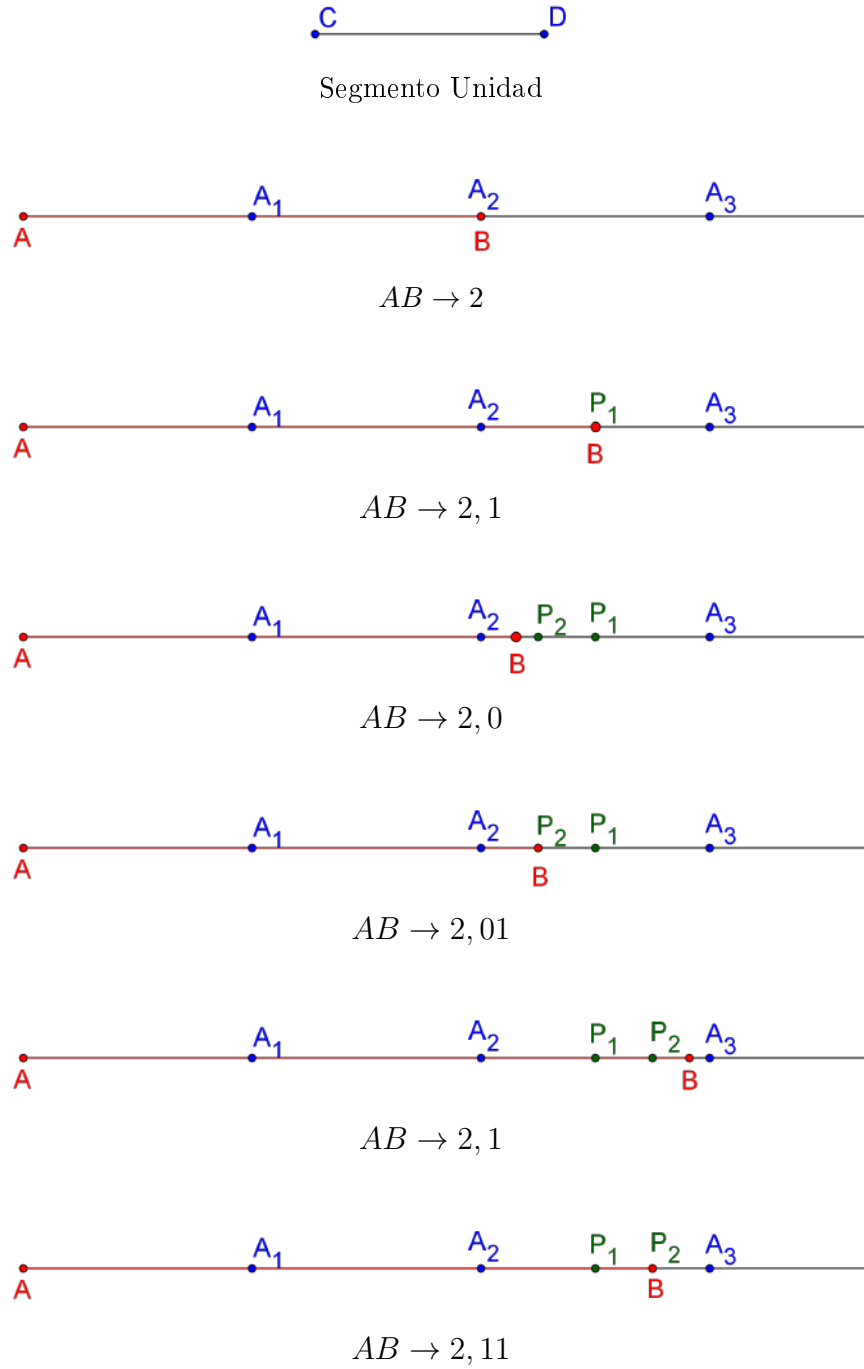


Figura 4.1.3: Proceso de Medición para  $n = 2$

- b) Escriba (sin la numeración):
- i. `ListaA=CopiaObjetoLibre[ListaA]`
  - ii. `E=Elemento[ListaA,n+1]`
  - iii. `E=CopiaObjetoLibre[E]`
  - iv. `G=TransportedeSegmentos[C,D,E,B]`
  - v. `G=CopiaObjetoLibre[G]`
  - vi. `F=Si[G*(1,0)>B*(1,0),CopiaObjetoLibre[F],G]`
  - vii. `F=CopiaObjetoLibre[F]`
  - viii. `ListaA=Si[G*(1,0)<B*(1,0),`  
`Añade[CopiaObjetoLibre[ListaA],F],`  
`CopiaObjetoLibre[ListaA]]`
  - ix. `n=Si[G*(1,0)<B*(1,0),n+1,n]`
- c) Sabiendo que el comando “CopiaObjetoLibre” se usa para quitar la dependencia de un objeto de otro, explique la razón de las líneas i, iii, v, vii.
- d) Sabiendo que el comando “Elemento” se usa para extraer un elemento de una lista, explique la razón de la línea ii.
- e) Sabiendo que la herramienta “Transporte de segmentos” tiene asociado el comando “TransportedeSegmentos”, explique la razón de la línea iv.
- f) Explique la línea vi (la expresión  $G * (1, 0)$  significa el producto escalar de  $G$  con el versor  $(1, 0)$ . Se usa para extraer la primera componente de un vector, en este caso  $G$ ).
- g) Sabiendo que el comando “Añade”, agrega un elemento a una lista, explique la razón de la línea viii.
- h) Presione el botón “Aplicar” en el pie del cuadro de texto.
6. Coloque un botón en algún lugar de la pantalla
- a) En la caja de diálogo, en el título coloque “Reset”.
  - b) En el cuadro de texto

Lista  $A = \{A\}$   
 $n=0$

- c) Explique este botón.
  - d) Presione “Aplicar” en el pie del cuadro de texto.
7. Presione el botón “Reset”.
  8. Presione el botón “Arquímedes” varias veces y observe la variación de  $n$ .
  9. Modifique el tamaño del segmento  $CD$  y vuelva a observar la variación de  $n$ .
  10. Considere el segmento  $CD$  como unidad lineal, pruebe que el proceso de medición (teórico) siempre devolverá un valor  $n$  y una sucesión finita de puntos  $A_1, A_2, \dots, A_n$  sobre la semirrecta de origen  $A$  que pasa por  $B$ , de tal modo que  $A_i A_{i+1} \equiv CD$ .
  11. Muestre que cualquier función de longitud  $\lambda$  que se establezca, asignará a cualquier segmento  $A_i A_{i+1}$  el valor 1 (coincidente con el valor que entregará el proceso de medición).
  12. Muestre que cualquier función de longitud  $\lambda$  que se establezca, asignará a cualquier segmento  $AA_n$  el valor  $n$  (coincidente con el valor que entregará el proceso de medición).
  13. Concluya la prueba.

**Lema 314.** *Si existe una función longitud de segmentos, entonces el proceso de medición dará la parte no entera de cualquier segmento menor que la unidad lineal en base binaria.<sup>2</sup>*

---

<sup>2</sup>Un número expresado en forma binaria puede, a veces, ser expresado de dos formas distintas. Por ejemplo, el número 11,01 puede expresarse como 11,001111... (infinitos 1). A lo largo de este texto elegiremos la primera forma exclusivamente.

Consecuentemente, si tenemos dos números  $a = c, a_1 a_2 a_3 \dots$  y  $b = d, b_1 b_2 b_3 \dots$  con  $c = d$ ,  $a > b$  si existe un entero  $n$  tal  $a_n = 1$  y  $b_n = 0$ , y  $a_i = b_i$ , para  $i < n$ .

**Ejercicio 315.** Pruebe el lema 314 siguiendo los pasos a continuación.

1. Dibuje un segmento  $a = AB$ , que no sea vertical, y un punto  $C$  en  $a$ .
2. Cargue la herramienta para transportar segmentos.
3. En la barra de entrada de Comandos escriba  $n = 0$ ,  $ListaA = \{A\}$  y  $ListaB = \{B\}$  y  $ListaBin = \{0\}$ .
4. Dibuje los puntos  $D, E, F, G$  y  $H$ . Oculte  $E, F, G$  y  $H$ .
5. Coloque un botón en algún lugar de la pantalla con el título "Arquímedes2".

a) Escriba:

```

n=n+1
ListaBin=CopiaObjetoLibre [ ListaBin ]
ListaA=CopiaObjetoLibre [ ListaA ]
E=Elemento [ ListaA ,n ]
E=CopiaObjetoLibre [ E ]
ListaB=CopiaObjetoLibre [ ListaB ]
F=Elemento [ ListaB ,n ]
F=CopiaObjetoLibre [ F ]
D=PuntoMedio [ E,F ]
D=CopiaObjetoLibre [ D ]
r=C*(1,0)
r=CopiaObjetoLibre [ r ]
s=D*(1,0)
s=CopiaObjetoLibre [ s ]
G=Si [ r<s , E, D ]
G=CopiaObjetoLibre [ G ]
H=Si [ r<s , D, F ]
H=CopiaObjetoLibre [ H ]
m=Si [ r<s , 0,1 ]

```

```
m=CopiaObjetoLibre [m]
ListaA=Añade [ CopiaObjetoLibre [ ListaA ] ,G]
ListaB=Añade [ CopiaObjetoLibre [ ListaB ] ,H]
ListaBin=Añade [ CopiaObjetoLibre [ ListaBin ] ,m]
```

- b) Interprete este botón.
  - c) Presione el botón “Aplicar” en el pie del cuadro de texto.
6. Coloque un botón en algún lugar de la pantalla llamado “Reset”

- a) En el cuadro de texto

```
n=0
ListaA={A}
ListaB={B}
ListaBin={0}
```

- b) Interprete este botón.
  - c) Presione “Aplicar” en el pie del cuadro de texto.
7. Presione el botón “Reset”.
8. Presione el botón “Arquímedes2” varias veces y observe la variación de los objetos *ListaA*, *ListaB*, *ListaBin* y *n*.
9. ¿Qué tipos de sucesiones se explicitan en las listas *ListaA* y *ListaB*?
10. ¿Qué se indica en la *ListaBin*? (Recuerde la expresión binaria de un número real).
11. Observe que este procedimiento está de acuerdo con la definición de la longitud de segmentos.

12. Suponga las funciones de longitud  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  cuya imagen se expresa en forma binaria (ambas con la misma unidad lineal). Suponga un segmento  $a$  menor que la unidad lineal tal que

$$\lambda_1(a) = 0, a_1 a_2 a_3 \dots$$

y

$$\lambda_2(a) = 0, b_1 b_2 b_3 \dots$$

y que el proceso de medición da la lista

$$\{m_1, m_2, m_3, \dots\}$$

donde  $a_i, b_j$  y  $m_k$  son 0 o 1,  $i, j, k$  son enteros positivos.

- a) Pruebe que si  $a$  es congruente con a la mitad de la unidad lineal, entonces  $a_1 = b_1 = m_1 = 1$  y  $a_j = b_j = m_j = 0$ , ( $1 < j$ ) (observe que si  $x < 0, 1$ , entonces  $x + x < 1$  y recuerde que  $1 = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i}$ ).
  - b) Pruebe que si  $a$  es congruente con la  $2^n$ -ésima parte de la unidad lineal, entonces  $a_n = b_n = m_n = 1$  y  $a_j = b_j = m_j = 0$ , ( $j \neq n$ ) (sugerencia: aplique inducción sobre  $n$ ).
  - c) Pruebe que si  $a$  es congruente con una suma finita de segmentos iguales a la  $2^n$ -ésima parte de la unidad lineal, entonces  $a_n = b_n = m_n = 1$  y  $a_j = b_j = m_j = 0$ , ( $j \neq n$ ) (sugerencia: use inducción sobre  $n$ ).
  - d) Pruebe que si  $\lambda_1(a)$  tiene parte no entera finita, entonces  $\lambda_1(a) = \lambda_2(a)$ .
  - e) Concluya la prueba.
13. Verifique que este proceso da la representación binaria de la longitud de un segmento menor que la unidad lineal (bajo el supuesto que se haya mostrado la existencia de una longitud). En otras palabras, si hubiésemos dado la longitud de todos los segmentos, el proceso de medición la expresaría. Por lo tanto, si **existe** la longitud, sería única.

**Lema 316.** *Si asignamos a cada segmento el resultado del proceso de medición, entonces el proceso de medición aplicado a*

1. *la unidad lineal da 1,*
2. *segmentos congruentes da resultados iguales.*

**Ejercicio 317.** Pruebe el lema 316 usando el teorema 138 para mostrar que la sucesión de puntos que surgen en cada paso del proceso de medición están en la misma disposición y, consecuentemente, el resultado será el mismo.

**Lema 318.** *Sea  $r$  una recta y sea una sucesión de puntos  $A_1, A_2, \dots$  en  $r$  tal que  $A_j$  está entre  $A_{j-1}$  y  $A_{j+1}$ , y sea otra sucesión  $B_1, B_2, \dots$  también sobre  $r$  tal que el segmento  $B_m B_{m-1} < A_m A_{m-1}$  para todo  $m$ , entonces si  $A_1$  está entre  $B_1$  y  $A_2$  entonces  $A_n$  está entre  $B_n$  y  $A_{n+1}$ , para cualquier  $n$ .*

**Ejercicio 319.** Pruebe el lema 318

1. Suponga que  $A_1$  está entre  $B_1$  y  $A_2$ .
2. Pruebe que el paso base de la prueba por inducción de la proposición  $A_n$  está entre  $B_n$  y  $A_{n+1}$  se cumple.
3. Suponga que para un  $k$  entero positivo fijo se cumple que  $A_k$  está entre  $B_k$  y  $A_{k+1}$ .
  - a) Suponga que  $B_{k+1}$  está en la semirrecta abierta  $B_k A_k$ .
    - 1) Muestre que  $B_k B_{k+1} < A_k A_{k+1} < B_k A_{k+1}$ .
    - 2) Pruebe que  $B_{k+1}$  está entre  $B_k$  y  $A_{k+1}$ .
    - 3) Muestre que  $A_{k+1}$  está entre  $B_{k+1}$  y  $A_{k+2}$ .
    - 4) Concluya la prueba para este caso.
  - b) Suponga que  $B_{k+1}$  está en la semirrecta opuesta abierta a la  $B_k A_k$  concluya la prueba para este caso.
  - c) Suponga que  $B_{k+1}$  es  $B_k$  y concluya la prueba para este caso.

4. Concluya la prueba.

**Lema 320.** *Sea un segmento  $PQ$ . Siempre es posible encontrar un número  $n$  tan grande como para que al dividir la unidad lineal en  $2^n$  partes iguales se obtengan segmentos cada uno de los cuales es menor que  $PQ$ .*

**Ejercicio 321.** Demuestre el lema 320

1. Sea  $OO'$  la siguiente sucesión de puntos generada de la manera siguiente: Sea  $A_1$  punto medio del segmento  $OO'$ ,  $A_2$  punto medio del segmento  $A_1O'$ , y en general  $A_m$  punto medio de  $A_{m-1}O'$  (para cualquier  $n$ ). Muestre que  $A_j$  está entre  $A_{j-i}$  y  $A_{j+1}$ .
2. Muestre por inducción que la longitud del segmento  $A_nA_{n+1}$  es  $\frac{1}{2^{n+1}}$ , para cualquier  $n$ .
3. Suponga, para reducir el problema al absurdo, la existencia de un segmento  $PQ$  tal que su longitud es menor que  $\frac{1}{2^n}$  para cualquier  $n$  entero positivo.
  - a) Construya la sucesión de puntos sobre la semirrecta  $OO'$  de la forma siguiente:  $B_1$  tal que  $OB_1 \equiv PQ$ ,  $B_2$  tal que  $B_1B_2 \equiv PQ$  y  $B_1$  entre  $O$  y  $B_2$ ,  $B_3$  tal que  $B_2B_3 \equiv PQ$  y  $B_2$  entre  $B_1$  y  $B_3$ , y así sucesivamente.
  - b) Muestre que  $B_mB_{m-1} < A_mA_{m-1}$  para todo  $m$ .
  - c) Use el lema anterior para mostrar que  $A_n$  está entre  $B_n$  y  $A_{n+1}$ , para cualquier  $n$ .
  - d) Use el lema anterior para mostrar que esto contradice el axioma de Arquímedes.

4. Concluya la prueba.

**Corolario 322.** *El proceso de medición no puede devolver el número  $0,11111\dots$*

**Ejercicio 323.** Probar el corolario 322 siguiendo los pasos a continuación.

1. Suponga, para reducir el problema al absurdo, que  $a = 0,11111\dots$  es el resultado del proceso de medición al medir un segmento  $b$ .
  - a) Muestre que  $b < OO'$ , con  $OO'$  la unidad lineal.
  - b) Pruebe que existe un punto  $O''$  entre  $O$  y  $O'$  tal que  $OO''$  es congruente con  $b$ .
  - c) Muestre que  $OO''$  es mayor que la mitad de la unidad lineal.
  - d) Muestre que  $O''O'$  es menor que la mitad de la unidad lineal.
  - e) Muestre que  $OO''$  es mayor que tres cuartos de la unidad lineal.
  - f) Muestre que  $O''O'$  es menor que un cuarto de la unidad lineal.
  - g) Muestre que  $OO''$  es mayor que siete octavos de la unidad lineal.
  - h) Muestre que  $O''O'$  es menor que un octavo de la unidad lineal.
  - i) Muestre que  $OO''$  es mayor que
 
$$\frac{2^n - 1}{2^n}$$
 de la unidad lineal, para cualquier  $n > 0$ .
  - j) Muestre que  $O''O'$  es menor que
 
$$\frac{1}{2^n}$$
 de la unidad lineal, para cualquier  $n > 0$ .
  - k) Muestre que esto contradice el lema 320.

2. Concluya la prueba.

**Corolario 324.** *El proceso de medición de un segmento no puede conducir a una fracción binaria infinita en la cual todas las cifras son iguales a 1, a partir de cierto orden.*

**Ejercicio 325.** Pruebe el corolario 324 con ayuda del corolario 322.

**Lema 326.** *Si el segmento  $A^*B^*$  es menor que el  $AB$  y los números  $b^*$  y  $b$  fueron obtenidos al medir estos segmentos, entonces  $b^* < b$ .*

**Ejercicio 327.** Pruebe el lema 326 siguiendo los pasos a continuación.

1. Dibuje un segmento  $a = AB$ , un segmento  $b = CD$  y un segmento  $c = OO'$ . Considere a  $OO'$  la unidad lineal.
2. Sobre la semirrecta  $AB$  transporte el segmento  $CD$ . El punto resultante llámelo  $B'$ .
3. Transporte el segmento  $OO'$ ,  $n$  veces, a partir de  $A$  hacia  $B$  hasta que la sucesión de puntos  $A_1, \dots, A_n$  sea tal que  $AA_n$  sea mayor que  $AB$  y que  $AB'$ . Dibuje la sucesión de puntos  $A_1, \dots, A_n$ .
4. Mueva el punto  $D$  y el punto  $B$ , de tal forma que  $A_{n-1}$  esté entre  $B$  y  $B'$ , y  $B'$  interior a  $a$  ¿Qué resultados da la parte entera del proceso de medición sobre los segmentos  $a$  y  $AB'$ ?
5. Mueva el punto  $D$  y el punto  $B$ , de tal forma que ambos estén entre  $A_{n-1}$  y  $A_n$ , pero que  $B'$  sea interior a  $a$ .
6. Muestre que si en este último caso el proceso de medición diera una sucesión de puntos tales que no hay ninguno entre  $B$  y  $B'$  contradiría la proposición 320.
7. Concluya la prueba.

**Teorema 328.** *Sea  $AC$  un segmento arbitrario,  $B$  un punto interior de  $AC$ . Sean  $a$ ,  $b$  y  $c$ , los números obtenidos al medir los segmentos  $AB$ ,  $BC$  y  $AC$ . Entonces*

$$a + b = c$$

**Ejercicio 329.** Para demostrar el teorema 328 siga los pasos a continuación.

1. Dibuje los segmentos  $a = AC$  y el punto  $B$  en  $a$ .
2. Dibuje el segmento  $d = DE$  y considérela la unidad lineal.
3. Dibuje un punto  $H$  en  $d$  tal que el segmento  $DH$  tenga su igual a  $1/8$ .
4. Transporte el segmento  $DH$  a partir de  $B$  hacia  $C$ ,  $k$  veces determinando los puntos  $C_1, \dots, C_k$  de tal modo que

$$BC_{k-1} < BC \leq BC_k$$

5. Transporte el segmento  $DH$  a partir de  $B$  hacia  $A$ ,  $l$  veces determinando los puntos  $A_1, \dots, A_l$  de tal modo que

$$BA_{l-1} < BA \leq BA_l$$

6. Muestre que

$$A_{l-1}C_{k-1} < AC \leq A_lC_k$$

7. Sean  $a, b$  y  $c$ , los números obtenidos al medir los segmentos  $AC$ ,  $AB$  y  $BC$ . Muestre que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^n}(l-1) &< c \leq \frac{1}{2^n}l \\ \frac{1}{2^n}(k-1) &< b \leq \frac{1}{2^n}k \\ \frac{1}{2^n}(k+l-2) &< a \leq \frac{1}{2^n}(k+l) \end{aligned}$$

8. Pruebe que

$$-\frac{1}{2^{n-1}} < a + b - c \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

9. Concluya la prueba.

**Teorema 330.** *Cualquiera que sea el número real  $a > 0$  existe algún segmento que es de longitud igual a  $a$ .*

**Ejercicio 331.** Suponga un segmento de longitud 6,125. Describa los pasos en un proceso de medición ¿Para qué números el proceso de medición consta de infinitos pasos? ¿Cuándo el resultado es una sucesión periódica?

**Ejercicio 332.** Pruebe el teorema 330 para el caso en que, si  $a < 1$ , no puede ser representado por una sucesión finita; siguiendo los pasos a continuación.

1. Dibuje un segmento  $a = AB$ .
2. En la barra de entrada de comandos escriba:  
 $ListaBin = \{0, 1, 1, 0, 1, 1\}$ ,  $n = 1$  y  $r = 1$ .
3. Pegue un botón, en el “Título” escriba *NroYSegmento*.

a) En “Guión”, copie el código siguiente:

```
n=n+1
ListaBin=CopiaObjetoLibre [ ListaBin ]
r=Elemento [ ListaBin , n ]
r=CopiaObjetoLibre [ r ]
M=PuntoMedio [ I ,D ]
M=CopiaObjetoLibre [M]
I=Si [ r==0, CopiaObjetoLibre [ I ] ,M ]
I=CopiaObjetoLibre [ I ]
D=Si [ r==0,M, CopiaObjetoLibre [D] ]
D=CopiaObjetoLibre [D]
```

- b) Interprete el programa.
  - c) Presione “Aplicar”.
4. Pegue un botón, en el “Título” escriba *Reset-*

a) En “Guión”, copie el código siguiente:

$n=1$   
 $D=B$   
 $I=A$   
 $M=A$

- b) Presione “Aplicar”.
5. Presione el botón “Reset”.
  6. Oculte  $M$ .
  7. Presione cinco veces el botón “NroYSegmento”.
  8. Halle el número decimal  $f$  que corresponde a la forma binaria  $0,11011$ .
  9. Dibuje el segmento  $b = AI$ .
  10. En la barra de entrada escriba  $f = b/a$ .
  11. Compruebe que el número  $f$  es igual al cociente de longitudes  $b/a$  (sugerencia: en el menú “Opciones” elija redondeo y luego cinco cifras decimales).
  12. Suponga que la lista *ListaBin* es una sucesión binaria infinita.
  13. Muestre que en este caso, a partir de un valor, no pueden ser todos 0 o todos 1.
  14. Note que de un paso al siguiente el segmento obtenido es la mitad izquierda o derecha del anterior según el elemento de la lista sea 0 o 1.
  15. Muestre que se genera una sucesión infinita encajada de segmentos.
  16. Use el axioma de Cantor para concluir con la prueba.

**Proposición 333.** *Dentro de cada segmento existen puntos que lo dividen en  $n$  partes iguales.*

**Ejercicio 334.** Para demostrar la proposición 333 siga los pasos a continuación.

1. Sea un segmento  $AB$  cualquiera. Pruebe que tiene una longitud  $a$ .
2. Pruebe que existe un segmento  $b$  que tiene longitud  $a/n$  para un  $n$  entero positivo.
3. Pruebe que a partir de  $A$  en dirección a  $B$  pueden determinarse puntos  $A_1, \dots, A_n$  tales que los segmentos  $A_i A_{i+1}$  ( $1 \leq i \leq n-1$ ), son congruentes con  $b$  y con  $AA_1$ .
4. Concluya la prueba.

**Definición 335.** Llamamos *magnitud* a toda función de los ángulos en los números reales positivos que cumple las condiciones:

- M 1 A ángulos congruentes le corresponden magnitudes iguales.
- M 2 Si la semirrecta  $l$  es interior del ángulo  $\angle(h, k)$  y a los ángulos  $\angle(h, l)$  y  $\angle(l, k)$  les corresponden las magnitudes  $\alpha$  y  $\beta$  respectivamente, entonces al ángulo  $\angle(h, k)$  le corresponde la longitud  $\alpha + \beta$ .
- M 3 Existe un ángulo  $\angle(o, o')$  de magnitud 1.

Al ángulo  $\angle(o, o')$  le llamamos *unidad angular* o *unidad de medida de amplitudes*.

**Ejercicio 336.** Enuncie el proceso de medición para ángulos.

**Teorema 337. (Función de coordenadas)** Dado un plano  $\alpha$ , una recta  $a$  en  $\alpha$ , un punto  $O$  en  $a$ . Llamemos positivo a uno de los semi-espacios determinados por  $a$  y al otro negativo. Llamemos positivo a uno de los semiplanos determinados por  $a$  y al otro negativo. Llamemos positiva a una de las semirrectas determinadas por  $O$  y a la otra negativa. Llamemos a  $O$  origen de coordenadas. Asignemos a cada punto  $P$  del espacio tres cantidades reales de la manera siguiente.

1. Desde  $P$  tracemos una perpendicular a  $\alpha$ . Sea  $M_\alpha$  el pie de la perpendicular. Asignamos la cantidad  $z$  a  $P$  de la siguiente manera:

- a) Si  $P$  está en el semiespacio positivo,  $z$  es la longitud del segmento  $PM_\alpha$ .
- b) Si  $P$  está en el semiespacio negativo,  $-z$  es la longitud del segmento  $PM_\alpha$ .
- c) Si  $P$  está en  $\alpha$ ,  $z$  es 0.

2. Desde  $M_\alpha$  tracemos una perpendicular a  $a$ . Sea  $M_a$  el pie de la perpendicular. Asignamos la cantidad  $y$  a  $P$  de la siguiente manera

- a) Si  $M_\alpha$  está en el semiplano positivo,  $y$  es la longitud del segmento  $M_\alpha M_a$ .
- b) Si  $M_\alpha$  está en el semiplano negativo,  $-y$  es la longitud del segmento  $M_\alpha M_a$ .
- c) Si  $M_\alpha$  está en  $a$ ,  $y$  es 0.

3. Asignamos la cantidad  $x$  a  $P$  de la siguiente manera

- a) Si  $M_a$  está en la semirrecta positiva,  $x$  es la longitud del segmento  $OM_a$ .
- b) Si  $M_a$  está en la semirrecta negativa,  $-x$  es la longitud del segmento  $OM_a$ .
- c) Si  $M_a$  es  $O$ ,  $x$  es 0.

Entonces, esta asignación es una función biyectiva de los puntos en las ternas de números reales. A esta función la llamamos “coordenadas”.

**Ejercicio 338.** Pruebe el teorema 337 siguiendo los pasos a continuación.

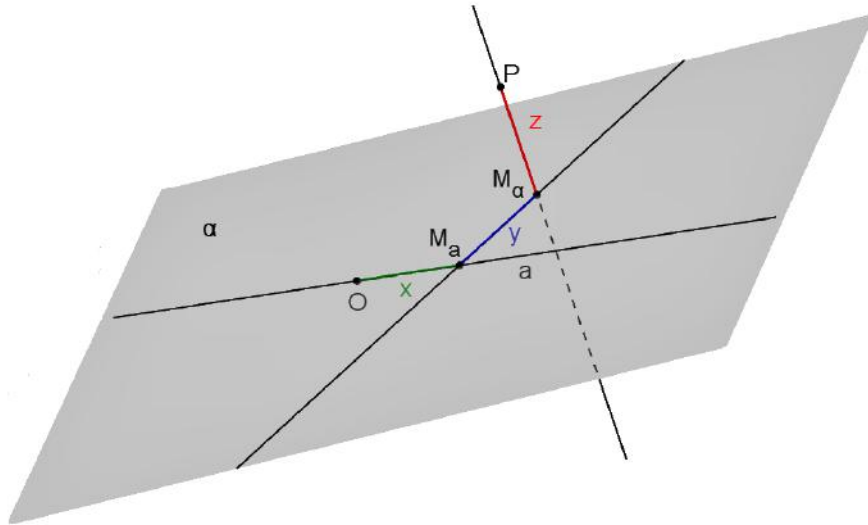


Figura 4.1.4: Coordenadas del punto  $P$

1. Pruebe que existe un comportamiento funcional en la asignación del teorema, es decir, que para cualquier punto  $P$ , existen todos los objetos requeridos por el teorema y además que son únicos (sugerencia: por ejemplo, debe probarse que existe un único punto  $M_a$  para cada  $P$ ).
2. Abra una hoja de GeoGebra en la vista 3D. Oculte los ejes y el plano  $xy$ .
3. Dibuje un plano  $\alpha$ .
4. Marque un punto  $P$  que no esté en  $\alpha$ .
5. Sobre  $\alpha$  dibuje una recta  $a = OA$  y un punto  $B$  fuera de  $a$  pero en  $\alpha$ . Llame positiva a la semirrecta  $OA$ , a la opuesta negativa. Llame positivo al semiplano donde está  $B$  y al opuesto, negativo. Elija uno de los semiespacios y llámele positivo y al otro negativo.

6. Trace la perpendicular  $b$  desde  $P$  a  $\alpha$ .
7. Marque el pie  $M_\alpha$  de  $b$ .
8. Trace la perpendicular  $c$  desde  $M_\alpha$  a  $a$ .
9. Marque el pie  $M_a$  de  $c$ .
10. Muestre que dados un plano  $\alpha$ , una recta  $a$  en  $\alpha$ , un punto  $O$  en  $a$  y un punto  $P$ , puede determinarse tres cantidades reales  $x$ ,  $y$  y  $z$ , de forma única, tal que  $|z| = PM_\alpha$ ,  $|y| = M_\alpha M_a$  y  $|x| = M_a O$  y el signo de  $x$ ,  $y$  y  $z$ , conforme indica el teorema.
11. Pinte de rojo el segmento  $d = PM_\alpha$ , de azul al segmento  $e = M_\alpha M_a$  y de verde al segmento  $M_a O$ .
12. Para considerar la función inversa considere  $x'$ ,  $y'$  y  $z'$  tres números reales<sup>3</sup> cualesquiera. Demuestre que:
  - a) Existe un único punto  $M'_a$  sobre  $a$  tal que:
    - 1) si  $x'$  es positivo  $M'_a$  está sobre la semirrecta positiva y el segmento  $M'_a O$  tiene longitud  $x'$ .
    - 2) si  $x'$  es negativo  $M'_a$  está sobre la semirrecta negativa y el segmento  $M'_a O$  tiene longitud  $-x'$ .
    - 3) si  $x'$  es cero  $M'_a$  es  $O$ .
  - b) Existe un único punto  $M'_\alpha$  sobre  $\alpha$  tal que:
    - 1) si  $y'$  es positivo  $M'_\alpha$  está sobre la semirrecta perpendicular a  $a$  de origen  $M'_a$  que está sobre el semiplano positivo y el segmento  $M'_\alpha M'_a$  tiene longitud  $y'$ .
    - 2) si  $y'$  es negativo  $M'_\alpha$  está sobre la semirrecta perpendicular a  $a$  de origen  $M'_a$  que está sobre el semiplano negativo y el segmento  $M'_\alpha M'_a$  tiene longitud  $-y'$ .
    - 3) si  $y'$  es cero  $M'_\alpha$  es  $M_a$ .

---

<sup>3</sup>Las propiedades de los reales como un cuerpo continuamente ordenado las presuponemos en este texto.

- c) Existe un único punto  $P'$  tal que:
- 1) si  $z'$  es positivo  $P'$  está sobre la semirrecta perpendicular a  $\alpha$  de origen  $M'_\alpha$  que está sobre el semiespacio positivo y el segmento  $P'M'_\alpha$  tiene longitud  $z'$ .
  - 2) si  $z'$  es negativo  $P'$  está sobre la semirrecta perpendicular a  $\alpha$  de origen  $M'_\alpha$  que está sobre el semiespacio negativo y el segmento  $P'M'_\alpha$  tiene longitud  $-z'$ .
  - 3) si  $z'$  es cero  $P'$  es  $O$ .
- d) Los números  $x'$ ,  $y'$  y  $z'$  son las coordenadas de  $P'$ .

13. Concluya la prueba.

**Corolario 339.** *Entre el conjunto ordenado de todos los puntos de una recta y el conjunto ordenado de todos los números reales podemos establecer una correspondencia biyectiva que preserva el orden.*

**Ejercicio 340.** Pruebe el corolario 339 (sugerencia: revise el orden de los puntos en una recta).

*Observación 341.* Un resultado del estudio de los reales es el principio de Dedekind que expresa lo siguiente:

Si todos los números reales están divididos en dos clases de manera que

1. cada número pertenece a una clase y solo a una y cada clase contiene números;
2. cada número de la primera clase es menor que cada número de la segunda;

entonces, o bien en la primera clase existe un número máximo o bien en la segunda un mínimo.

**Teorema 342.** *(Principio de Dedekind para la recta) Si todos los puntos de una recta están divididos en dos clases de manera que:*

1. cada punto pertenece a una clase y solo a una; y cada clase contiene puntos;
2. cada punto de la primera clase precede a cada punto de la segunda;

entonces, o bien en la primera clase existe un punto que sigue a todos los demás de su clase o bien en la segunda uno que precede a todos los demás de dicha clase.

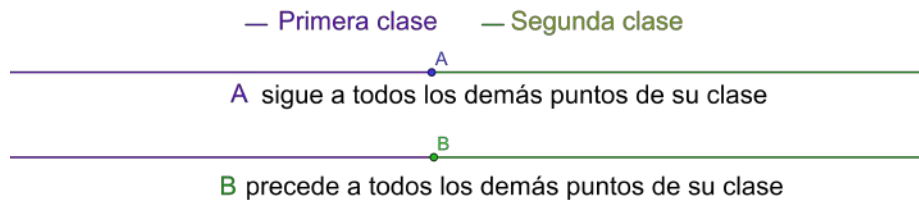


Figura 4.1.5: Principio de Dedekind

**Ejercicio 343.** Pruebe el teorema 342 usando el corolario 339 y el principio de Dedekind para los reales.

**Corolario 344.** (*Principio de Dedekind para los segmentos*) Si todos los puntos interiores de un segmento están divididos en dos clases de manera que:

1. cada punto pertenece a una clase y sólo a una, y cada clase contiene puntos;
2. cada punto de la primera clase precede a cada punto de la segunda;

entonces, o bien en la primera clase existe un punto que sigue a todos los demás de su clase o bien en la segunda uno que precede a todos los demás de dicha clase.

**Ejercicio 345.** Pruebe el corolario 344 siguiendo los pasos a continuación

1. Dibuje una recta  $a = AB$ .
2. Marque el segmento  $b = AB$  y píntelo de rojo.
3. Dibuje la semirrecta  $c$  opuesta a la  $AB$  y píntela de azul.
4. Dibuje la semirrecta  $d$  opuesta a la  $BA$  y píntela de verde.
5. Sea  $\mathcal{X}$  el conjunto de los puntos de la primera clase del segmento  $b$  y  $\mathcal{Y}$  el conjunto de los puntos de la segunda clase del segmento  $b$ , según el orden  $<_{AB}$ .
6. Sea  $\mathcal{X}'$  la unión de  $\mathcal{X}$  con el conjunto de los puntos de  $c$  y  $\mathcal{Y}'$  la unión de  $\mathcal{Y}$  con el conjunto de los puntos de  $d$ .
7. Pruebe que  $\mathcal{X}'$  y  $\mathcal{Y}'$  cumplen con las hipótesis del teorema 342.
8. Pruebe que en  $\mathcal{X}'$  existe un máximo  $E$  o que en  $\mathcal{Y}'$  existe un mínimo  $F$ .
9. Pruebe que  $E$  es el máximo de  $\mathcal{X}$  o que  $F$  es el mínimo de  $\mathcal{Y}$ .
10. Concluya la prueba.

**Teorema 346.** *Si todas las semirrectas interiores de un ángulo están divididas en dos clases de manera que:*

1. *cada semirrecta pertenece a una clase y solo a una, y cada clase contiene alguna semirrecta;*
2. *cada semirrecta de la primera clase precede a cada una de la segunda;*

*entonces, o bien en la primera clase existe una semirrecta que sigue a todas las demás de su clase o bien en la segunda, una que precede a todas las demás de dicha clase.*

**Ejercicio 347.** Para demostrar el teorema 346 siga los pasos a continuación.

1. Dibuje tres puntos no alineados  $A$ ,  $O$  y  $B$ .
2. Trace las semirrectas  $a = OA$ ,  $b = OB$ .
3. Trace el segmento  $c = AB$ .
4. Pruebe que a una clase de semirrectas interiores le corresponde una clase de los puntos interiores de  $c$  por medio de una biyección  $\nu$  (sugerencia: vea el teorema 120).
5. Concluya la prueba.

**Teorema 348.** *El principio de Dedekind puede ser deducido de los grupos I-IV de axiomas.*

**Ejercicio 349.** Para demostrar el teorema 348 siga los pasos a continuación.

1. Suponga, para reducir el problema al absurdo, que existen dos clases como las que asume el principio de Dedekind, pero que la primera de las clases  $\mathcal{A}$  no tiene máximo, ni la segunda  $\mathcal{B}$  tiene un mínimo.
  - a) Tome un punto  $A_0$  en  $\mathcal{A}$  y un punto  $B_0$  en  $\mathcal{B}$ .
  - b) Tome el punto medio  $M$  del segmento  $A_0B_0$ .
  - c) Si  $M$  está en  $\mathcal{A}$  renombre  $M = A_1$  y  $B_0 = B_1$ . Si  $M$  está en  $\mathcal{B}$  renombre  $M = B_1$  y  $A_0 = A_1$ .
  - d) Muestre que existe en  $\mathcal{A}$  un punto estrictamente mayor que  $A_1$  y en  $\mathcal{B}$  un punto estrictamente menor que  $B_1$ .
  - e) Tome el punto medio  $N$  del segmento  $A_1B_1$ .
  - f) Si  $N$  está en  $\mathcal{A}$  renombre  $N = A_2$  y  $B_1 = B_2$ . Si  $N$  está en  $\mathcal{B}$  renombre  $N = B_2$  y  $A_1 = A_2$ .

- g) Muestre que existe en  $\mathcal{A}$  un punto estrictamente mayor que  $A_2$  y en  $\mathcal{B}$  un punto estrictamente menor que  $B_2$ .
- h) Construya (teóricamente) las sucesiones  $\{A_i\}_{\mathbb{N}}$  y  $\{B_i\}_{\mathbb{N}}$ .
- i) Muestre que ni  $\{A_i\}_{\mathbb{N}}$  ni  $\{B_i\}_{\mathbb{N}}$ , pueden ser constantes desde un orden en adelante (sugerencia: vea el corolario 324).
- j) Muestre que existe una subsucesión estrictamente creciente  $\{A'_i\}_{\mathbb{N}}$  de  $\{A_i\}_{\mathbb{N}}$  y subsucesión estrictamente decreciente  $\{B'_i\}_{\mathbb{N}}$  de  $\{B_i\}_{\mathbb{N}}$ .
- k) Verifique que los segmentos  $A'_0B'_0, A'_1B'_1, A'_2B'_2, \dots$  cumplen las hipótesis del teorema de Cantor.
- l) Muestre que existe un punto  $C$  que es mayor que cualquier punto de  $\{A'_i\}_N$  y menor que cualquier punto de  $\{B'_i\}_N$ .
- m) Muestre que si  $C$  está en  $\mathcal{A}$ , entonces;
  - 1) existe en  $\mathcal{A}$  un punto  $A^*$  que es estrictamente mayor que  $C$ ;
  - 2) el segmento  $CA^*$  está en todos los segmentos  $A'_0B'_0, A'_1B'_1, A'_2B'_2, \dots$ ;
  - 3) muestre que esto es contradictorio.
- n) Muestre que si  $C$  está en  $\mathcal{B}$ , entonces;
  - 1) existe en  $\mathcal{B}$  un punto  $B^*$  que es estrictamente menor que  $C$ ;
  - 2) el segmento  $CB^*$  está en todos los segmentos  $A'_0B'_0, A'_1B'_1, A'_2B'_2, \dots$ ;
  - 3) Muestre que esto es contradictorio.

2. Concluya la prueba.

**Teorema 350.** *Si a los axiomas I-III le agregamos el principio de Dedekind, los axiomas de Cantor y de Arquímedes pueden ser deducidos.*

**Ejercicio 351.** Para demostrar el teorema 350 siga los pasos a continuación.

1. Suponga que existen dos segmentos  $AB$  y  $CD$  que contradicen el principio de Arquímedes, ¿en qué consiste la contradicción? (sugerencia: tome el orden de los puntos en la recta  $AB$  desde  $A$  a  $B$ ).
2. Forme una sucesión de puntos  $A_1, \dots, A_n, \dots$ , infinita a partir de  $A$  en dirección a  $B$ , tal que los segmentos  $A_i A_{i+1}$  ( $i = 1, \dots$ ),  $AA_1$  y  $CD$  son congruentes.
3. Note que ninguno de los puntos  $A_i$  de la sucesión puede dejar a  $B$  entre  $A$  y  $A_i$ .
4. Forme la clase de todos los puntos  $P$  tales que existe un  $A_i$  que sigue a  $P$ . Llame a ésta primera clase, y a todos los otros puntos de la recta  $AB$  supóngalos de la segunda clase.
5. Verifique que estas clases satisfacen el principio de Dedekind.
6. Llámeme  $E$  al punto de Dedekind. Muestre que debe estar en la segunda clase.
7. Tome un punto  $F$  que esté antes que  $E$  y que  $EF \equiv CD$ .
8. Pruebe que  $F$  debe estar en la primera clase.
9. Muestre que debe existir un punto  $A_n$  después de  $F$ .
10. Muestre que debe existir un punto  $A_{n+1}$  después de  $E$  (lo que es absurdo).
11. Concluya que esto prueba el principio de Arquímedes.
12. Suponga una sucesión de segmentos  $A_1 B_1, \dots, A_n B_n, \dots$  que satisfagan las hipótesis del axioma de Cantor.
13. Muestre que las sucesiones  $A_1, \dots, A_n, \dots$  y  $B_1, \dots, B_n, \dots$ , deben ser infinitas.

14. Forme la clase de todos los puntos  $P$  tales que existe un  $A_i$  que sigue a  $P$ . Llame a esta primera clase y a todos los otros puntos de la recta  $A_1B_1$  supóngalos de la segunda clase.
15. Verifique que estas clases satisfacen el principio de Dedekind.
16. Llámeme  $E$  al punto de Dedekind. Muestre que debe estar en la segunda clase.
17. Pruebe que este punto no puede estar después de ningún  $B_i$ .
18. Concluya con la prueba.

#### 4.1.1. La circunferencia

**Definición 352.** Dado un punto  $O$  y un punto  $A \neq O$ , al lugar de los puntos  $P$  tales que los segmentos  $AO$  y  $PO$  sean congruentes lo llamamos *circunferencia de centro  $O$  que pasa por  $A$* .

- A cualquier segmento  $OP$ , con  $P$  un punto de la circunferencia le llamamos *radio* de la circunferencia.
- Si un punto  $P$  está a una distancia del centro menor que un radio le llamamos *punto interior*. Si un punto  $P$  está a una distancia del centro mayor que un radio le llamamos *punto exterior*. Al conjunto de los puntos interiores le llamamos *interior* de la circunferencia. A la circunferencia con su interior le llamamos *círculo*.
- Sean  $A$  y  $B$  dos puntos de una circunferencia, al segmento  $AB$  le llamamos *cuerda* de la circunferencia. A las cuerdas que pasan por el centro de la circunferencia las llamamos *diámetros*.
- Una cuerda de una circunferencia divide a ésta en dos arcos de acuerdo al lado de la prolongación de la cuerda. Si la cuerda  $AB$  no es un diámetro llamamos *arco menor  $AB$*  al arco que está del otro lado del centro de la circunferencia con respecto a la recta  $AB$  y *arco mayor  $AB$*  al que está del mismo lado del centro.

- Una recta tangente a una circunferencia es una recta con un solo punto en común con la circunferencia.

**Proposición 353.** *Una tangente a una circunferencia es la perpendicular al radio por el punto de tangencia. Además, todos los demás puntos de la circunferencia y los interiores a la misma se encuentran del mismo lado del centro respecto de la tangente.*

**Ejercicio 354.** Pruebe la proposición 353 siguiendo los pasos a continuación.

1. Marque un segmento  $b = AO$ .
2. Por  $A$  marque una recta  $a$  que no sea ni perpendicular ni colineal al segmento  $b$ .
3. Trace la perpendicular  $c$  a  $a$  por  $O$ .
4. Marque el pie de  $c$  y llámelo  $M$ .
5. Marque el simétrico  $A'$  de  $A$  con respecto a  $M$ .
6. Pruebe que los triángulos  $AMO$  y  $A'MO$  son congruentes.
7. Pruebe que si una circunferencia  $d$  de centro  $O$  pasa por  $A$  entonces pasa también por  $A'$ . Dibuje a  $d$ .
8. Muestre que si una recta no es perpendicular al radio por un punto de intersección con la circunferencia, entonces no es una tangente.
9. Concluya que si una recta es tangente a una circunferencia entonces debe ser perpendicular al radio por el punto de tangencia.
10. Trace una perpendicular  $e$  a  $b$  por  $A$ . Píntela de rojo.
11. Marque en  $e$  un punto  $C \neq A$ .
12. Muestre que  $OC > OA$ .

13. Muestre que si una recta es perpendicular al radio por un punto de intersección con la circunferencia, entonces es una tangente.
14. Marque un punto  $D$  cualquiera al otro lado de  $e$  que  $O$ .
15. Pruebe que existe un punto  $E$  de corte del segmento  $OD$  con  $e$ .
16. Marque un punto  $F$  interior a la circunferencia.
17. Muestre que  $OD > OE > OA > OF$ .
18. Pruebe que un punto de la circunferencia o un punto interior, no puede estar del otro lado del centro de la circunferencia con respecto a la tangente.
19. Concluya con la prueba.

**Proposición 355.** *Una circunferencia y una recta no pueden tener tres puntos en común.*

**Ejercicio 356.** Pruebe la proposición 355 siguiendo los pasos a continuación.

1. Dibuje la recta  $a = AB$  y un punto  $O$  fuera de ella.
2. Marque un punto  $C$  con  $B$  entre  $A$  y  $C$ .
3. Trace los segmentos  $b = AO$ ,  $c = BO$  y  $d = CO$ .
4. Muestre que los segmentos  $b$ ,  $c$  y  $d$  no pueden ser congruentes (Note que  $\widehat{ABO}$  es suplementario del  $\widehat{OBC}$ ).
5. Concluya la prueba.

**Proposición 357.** *Los puntos interiores de un segmento con extremos en un círculo están en el círculo<sup>4</sup>.*

---

<sup>4</sup>En este caso se dice que los círculos son *conjuntos convexos*.

**Ejercicio 358.** Pruebe la proposición 357 (sugerencia: use el corolario 220).

**Proposición 359.** Sea una circunferencia  $c$  de centro  $O_1$  y un punto  $O_2 \neq O_1$ . Sean dos puntos  $A$  y  $B$  sobre  $c$  del mismo lado de la recta  $a = O_1O_2$ . Sean  $P$  el pie de la perpendicular  $b$  desde  $A$  a  $a$ , y  $Q$  el pie de la perpendicular  $d$  desde  $B$  a  $a$ . Si  $Q <_{O_2O_1} P$  entonces  $\widehat{BO_1O_2} < \widehat{AO_1O_2}$ .

**Ejercicio 360.** Pruebe la proposición 359 siguiendo los pasos a continuación.

1. Dibuje las hipótesis de la proposición 359.
2. Muestre que los puntos  $P$  y  $Q$  están en el interior de  $c$ .
3. Suponga que  $O_1$  está en la semirrecta  $QP$ . Arrastre los puntos  $A$  y  $B$  para representar esta situación.
  - a) Suponga para reducir el problema al absurdo que  $\widehat{AO_1O_2} < \widehat{BO_1O_2}$ .
    - 1) Pruebe que la semirrecta  $O_1A$  es interior a  $\widehat{BO_1O_2}$ .
    - 2) Pruebe que  $Q$  está en la semirrecta  $O_1O_2$ .
    - 3) Muestre que el segmento  $QB$  se apoya en  $\widehat{BO_1O_2}$ .
    - 4) Muestre que la semirrecta  $O_1A$  corta al segmento  $QB$  en un punto  $C$ .
    - 5) Pruebe que  $C$  es interior a  $c$ .
    - 6) Muestre que  $A$  y  $O_1$  están a distintos lados de la recta  $d$ .
    - 7) Pruebe que todos los puntos de  $b$ , particularmente  $P$  están al otro lado de  $O_1$  con respecto a  $d$ .
    - 8) Muestre que  $Q$  está entre  $P$  y  $O_1$ .
    - 9) Concluya que esto es absurdo.
  - b) Suponga que  $\widehat{AO_1O_2} \equiv \widehat{BO_1O_2}$  y concluya que es absurdo.

- c) Concluya la prueba de la proposición 359 para este caso.
4. Suponga que  $O_1$  está en la semirrecta opuesta a  $QP$ . Arrastre los puntos  $A$  y  $B$  para representar esta situación.
- Pruebe que  $Q$  está entre  $O_1$  y  $P$ .
  - Pruebe que  $d$  corta al segmento  $O_1A$  en un punto  $D$ . Dibuje a  $D$ .
  - Pruebe que  $D$  está en el interior de  $c$ .
  - Pruebe que  $D$  está en el segmento  $QB$ .
  - Muestre que  $B$  y  $Q$  están a distintos lados con respecto a la recta  $O_1A$ .
  - Muestre que  $B$  está en el mismo lado que  $O_2$  con respecto a la recta  $O_1A$ .
  - Muestre que  $B$  es interior a  $\widehat{AO_1O_2}$ .
  - Concluya la prueba de la proposición 359 para este caso.
5. Suponga que  $O_1$  es  $Q$ . Arrastre los puntos  $A$  y  $B$  para representar esta situación.
- Pruebe que  $O_1$  está entre  $O_2$  y  $P$ .
  - Muestre que  $B$  y  $P$  están a distintos lados con respecto a la recta  $O_1A$ .
  - Muestre que  $B$  está en el mismo lado que  $O_2$  con respecto a la recta  $O_1A$ .
  - Muestre que  $B$  es interior a  $\widehat{AO_1O_2}$ .
  - Concluya la prueba de la proposición 359 para este caso.
6. Concluya la prueba.

## 4.2. Intersección de recta y circunferencia

**Lema 361.** *Sea una circunferencia  $c$  de centro  $O$  y radio  $r$  y una semirrecta abierta  $s$  de origen  $A$ , con  $A$  en el interior de  $c$ . Entonces:*

1. *existe en  $s$  un punto  $B$  en el interior de  $c$ . En otras palabras, hay al menos un punto de  $s$  interior a  $c$ ;*
2. *existe en  $s$  un punto  $C$  en el exterior de  $c$ . En otras palabras, hay al menos un punto de  $s$  exterior a  $c$ ;*
3. *si un punto  $D$  de  $s$  es interior a  $c$ , entonces todos los puntos menores que  $D$  (según  $s$ ) en  $s$ , son interiores a  $c$ ;*
4. *si un punto  $E$  de  $s$  es interior a  $c$ , existe un punto  $E'$  mayor que  $E$  (según  $s$ ) interior a  $c$ . En otras palabras, para cada punto de  $s$  interior a  $c$ , hay otro punto de  $s$  interior a  $c$ , pero mayor;*
5. *si un punto  $F$  de  $s$  es exterior a  $c$ , entonces todos los puntos mayores que  $F$  (según  $s$ ) son exteriores a  $c$ ;*
6. *si un punto  $G$  de  $s$  es exterior a  $c$ , existe un punto  $G'$  menor que  $G$  (según  $s$ ) exterior a  $c$ . En otras palabras, para cada punto de  $s$  exterior a  $c$ , hay otro punto de  $s$  exterior a  $c$  pero menor.*

**Ejercicio 362.** Pruebe el lema 361

1. Dibuje una circunferencia  $c$  de centro  $O$  y radio  $r$  y una semirrecta abierta  $s$  de origen  $A$ , con  $A$  en el interior de  $c$ .
2. Muestre, usando los resultados de incidencia, orden y congruencia que si  $s$  o su opuesta pasan por  $O$  el resultado es inmediato.
3. Suponga que  $s$  no pasa por  $O$ .
  - a) Muestre que existe en  $s$  un segmento  $AB$  de longitud  $r - |OA|$ .
  - b) Use la propiedad triangular en el triángulo  $OBA$  para mostrar que  $|OB| < r$ .

## 4.2. INTERSECCIÓN DE RECTA Y CIRCUNFERENCIA

---

- c) Muestre que  $B$  es interior a  $c$ .
- d) Muestre que existe en  $s$  un segmento  $AC$  de longitud  $2r$ .
- e) Use la propiedad triangular en el triángulo  $OBC$  para mostrar que  $|OC| > r$ .
- f) Muestre que  $C$  es exterior a  $c$ .
- g) Suponga un punto  $D$  de  $s$  interior a  $c$ . Muestre que todos los puntos entre  $A$  y  $D$  son interiores a  $c$  (sugerencia: recuerde que los círculos son convexos).
- h) Muestre que si un punto  $D$  de  $s$  es interior a  $c$ , entonces todos los puntos menores que  $D$  (según  $s$ ) son interiores a  $c$ .
- i) Suponga un punto  $E$  de  $s$  que es interior a  $c$ .
  - 1) Muestre que existe en la semirrecta opuesta a la  $EA$  un segmento  $EE'$  de longitud  $r - |OE|$ .
  - 2) Use la propiedad triangular en el triángulo  $OEE'$  para mostrar que  $|OE'| < r$ .
  - 3) Pruebe que existe un punto  $E'$  mayor que  $E$  (según  $s$ ) interior a  $c$ .
- j) Suponga un punto  $F$  de  $s$  exterior a  $c$ . Suponga para reducir el problema al absurdo que existe un punto  $M > F$  según  $s$ , tal que  $|OM| < r$ .
  - 1) Pruebe que el segmento  $AM$  debe ser interior a  $c$ .
  - 2) Muestre que esto contradice la convexidad de los círculos.
- k) Suponga un punto  $G$  de  $s$  exterior a  $c$ .
  - 1) Muestre que existe en la semirrecta  $GA$  un segmento  $GG'$  de longitud  $|OG| - r$ .
  - 2) Use la propiedad triangular en el triángulo  $OGG'$  para mostrar que  $|OG'| > r$ .
  - 3) Pruebe que existe un punto  $G'$  menor que  $G$  (según  $s$ ) exterior a  $|c|$ .

4. Concluya la prueba.

**Corolario 363.** *Sea una circunferencia  $c$  de centro  $O$  y radio  $r$ , y una semirrecta abierta  $s$  de origen  $A$ , con  $A$  en el interior de  $c$ . Sea el conjunto  $\mathcal{S}$  de puntos  $P$  de  $s$ , tales que existe un punto  $Q$  de  $s$ , de modo que  $|OQ| < r$  y  $P < Q$  (según  $s$ ), y sea  $\mathcal{S}' = s - \mathcal{S}$ . Se cumple que:*

1.  $\mathcal{S}$  y  $\mathcal{S}'$  son no vacíos.
2.  $\mathcal{S}$  es abierto.
3. Cualquiera de los puntos de  $\mathcal{S}$  es menor (según  $s$ ) que cualquiera de los puntos de  $\mathcal{S}'$ .
4. Todos los puntos de  $s$  interiores a  $c$  están en  $\mathcal{S}$ .
5. Todos los puntos de  $s$  exteriores a  $c$  están en  $\mathcal{S}'$ .

**Ejercicio 364.** Pruebe el corolario 363 (sugerencia: vea el lema 361).

**Teorema 365.** *Toda semirrecta con origen en un punto interior de una circunferencia corta a dicha circunferencia.*

**Ejercicio 366.** Demuestre el teorema 365.

1. Dibuje una circunferencia  $c$  de centro  $O$  y radio  $r$ , y una semirrecta abierta  $s$  de origen  $A$ , con  $A$  en el interior de  $c$ .
2. Muestre que el conjunto  $\mathcal{X}$  de puntos de  $P$  de  $s$  tales que existe un punto  $Q$  tal que  $|OQ| < r$  y  $P < Q$  según  $s$ , junto con los puntos de la semirrecta opuesta a  $s$ ; y el conjunto  $\mathcal{Y}$  de los demás puntos de  $s$ , cumplen con las hipótesis del principio de Dedekind (sugerencia: compare con los conjuntos  $\mathcal{S}$  y  $\mathcal{S}'$  del corolario 363).
3. Muestre que existe un punto  $D$  en  $s$  que es el mínimo de  $\mathcal{Y}$ .
4. Suponga para reducir el problema al absurdo que  $|OD| < r$ .

### 4.3. INTERSECCIÓN DE DOS CIRCUNFERENCIAS

---

- a) Pruebe que  $D$  está en  $\mathcal{X}$ .
  - b) Concluya con la prueba por el absurdo.
5. Suponga para reducir el problema al absurdo que  $|OD| > r$ .
- a) Muestre que existe un punto menor que  $D$  que está en  $\mathcal{Y}$ .
  - b) Concluya con la prueba por el absurdo.
6. Concluya con la prueba.

**Corolario 367.** *Si una recta tiene un punto en el interior de una circunferencia, cortará a esta en dos puntos. Si un segmento tiene un extremo en el interior de una circunferencia y otro en el exterior, cortará a dicha circunferencia.*

**Ejercicio 368.** Demuestre el corolario 367.

### 4.3. Intersección de dos circunferencias

**Lema 369.** *Sean  $c_1$  la circunferencia de centro  $O_1$  y radio  $r_1$ , y  $c_2$  la circunferencia de centro  $O_2$  y radio  $r_2$ . Si  $c_1$  tiene un punto  $M$  en el interior de  $c_2$  y un punto  $N$  en el exterior de  $c_2$ , entonces*

$$|r_1 - r_2| < |O_1O_2| < r_1 + r_2,$$

*y recíprocamente. Además, existen los puntos  $A$  y  $A'$  de  $c_2$ , en el interior y en el exterior de  $c_1$ , respectivamente; y los puntos  $B$  y  $B'$  de  $c_1$ , en el interior y en el exterior de  $c_2$ , respectivamente; con  $A, A', B, B', O_1$  y  $O_2$  alineados, con  $O_1$  entre  $B'$  y  $O_2$ , y  $O_2$  entre  $O_1$  y  $A'$ .*

**Ejercicio 370.** Demuestre el lema 369

1. Dibuje la circunferencia  $c_1$  de centro  $O_1$  y radio  $r_1$ , y la circunferencia  $c_2$  de centro  $O_2$  y radio  $r_2$ .
2. Para demostrar la condición necesaria, dibuje un punto  $M$  de  $c_1$  en el interior de  $c_2$  y un punto  $N$  de  $c_1$  en el exterior de  $c_2$ .

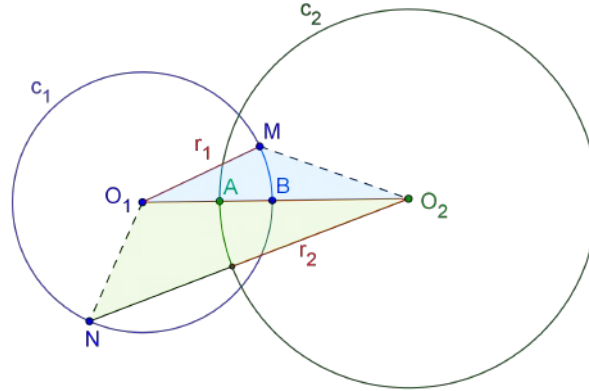


Figura 4.3.1: Relaciones entre circunferencias que se cortan

a) Muestre que se cumple que

$$|O_1O_2| \leq r_1 + |O_2M| < r_1 + r_2$$

b) Muestre que se cumple que

$$|O_1O_2| \geq |r_1 - |O_2N||$$

c) Muestre que si  $r_1 > |O_2N|$  entonces

$$\begin{aligned} |O_1O_2| &\geq |r_1 - |O_2N|| = r_1 - |O_2N| \\ -|O_1O_2| &\leq O_2N - r_1 < r_2 - r_1 \end{aligned}$$

d) Muestre que si  $r_1 < |O_2N|$  entonces

$$|O_1O_2| \geq |r_1 - |O_2N|| = |O_2N| - r_1 > r_2 - r_1$$

e) Concluya con la condición necesaria.

3. Para demostrar la condición suficiente, marque un punto  $M$  en la semirrecta  $O_1O_2$  tal que  $|O_1M| = r_1$  y un punto  $N$  en la semirrecta opuesta a  $O_1O_2$  tal que  $|O_1N| = r_1$ .

### 4.3. INTERSECCIÓN DE DOS CIRCUNFERENCIAS

---

- a) Marque un punto  $S$  en la semirrecta  $O_2O_1$  tal que  $|O_2S| = r_2$  y un punto  $T$  en la semirrecta opuesta a  $O_2O_1$  tal que  $|O_2T| = r_2$ .
- b) Tome el orden inducido por la semirrecta  $O_1O_2$  y suponga para reducir el problema al absurdo que  $M < S$ .

- 1) Muestre que en este caso se cumple

$$|O_1O_2| = |O_1M| + |MS| + |SO_2| = r_1 + |MS| + r_2 > r_1 + r_2$$

- 2) Concluya con la prueba por el absurdo.

- c) Muestre que  $M$  no puede ser  $S$ .

- d) Tome el orden inducido por la semirrecta  $O_1O_2$  y suponga, para reducir el problema al absurdo, que  $M > T$

- 1) Muestre que

$$r_1 = |MT| + |TO_2| + |O_1O_2| = |MT| + r_2 + |O_1O_2|$$

- 2) Muestre que  $r_1 > r_2$ .

- 3) Muestre que

$$r_1 - r_2 = |r_1 - r_2| = |MT| + |O_1O_2| > |O_1O_2|$$

- 4) Concluya con la prueba por el absurdo

- e) Muestre que  $M$  no puede ser  $T$ .

- f) Pruebe que  $S < M < T$ .

- g) Muestre que  $M$  está en  $c_2$ .

- h) Muestre que  $N$  no está en  $c_2$ .

- i) Concluya la prueba de la condición suficiente.

4. Para demostrar la segunda parte del lema siga los pasos a continuación.

- a) Muestre que existe un punto  $A$  sobre la semirrecta  $O_2O_1$  y un punto  $A'$  sobre la semirrecta opuesta tales que la longitud de los segmentos  $O_2A$  y  $O_2A'$  es igual a  $r_2$ . Marque los puntos  $A$  y  $A'$ .

b) Muestre que si  $|O_1A'| \leq r_1$ , entonces

$$|O_1A'| = |O_1O_2| + r_2 \geq r_1$$

(Note que  $O_2$  está entre  $O_1$  y  $A'$ )

c) Muestre que esto es contradictorio.

d) Arrastre el punto  $A$  de modo que se encuentre entre  $O_1$  y  $O_2$ .

1) Muestre que si  $|O_1A| \geq r_1$ , entonces  $|O_1O_2| = |O_1A| + |AO_2| \geq r_1 + r_2$

2) Muestre que esto es contradictorio.

e) Arrastre el punto  $A$  de modo que  $O_1$  se encuentre entre  $A$  y  $O_2$ .

1) Muestre que si  $|O_1A| \geq r_1$ , entonces  $r_2 = |O_2A| = |O_2O_1| + |O_1A| \geq |O_2O_1| + r_1$

2) Muestre que esto es contradictorio.

f) Realice los pasos análogos con respecto a  $B$  y  $B'$ .

5. Concluya la prueba

**Corolario 371.** Si  $c_1$  tiene un punto  $M$  en el interior de  $c_2$  y un punto  $N$  en el exterior de  $c_2$ , entonces  $c_2$  tiene un punto  $S$  en el interior de  $c_1$  y un punto  $T$  en el exterior de  $c_1$ .

**Ejercicio 372.** Pruebe el lema 371.

**Definición 373.** Sean  $A$  y  $B$  como en el lema 369. Si un punto  $P$  cumple que  $PE_2 < PE_1$ , donde  $E_1$  y  $E_2$  son las intersecciones de una semirrecta perpendicular a la recta  $AB$  de origen  $P$  con  $c_1$  y  $c_2$  respectivamente, decimos que *cumple la propiedad  $\mathcal{P}$* . Si un punto  $P$  cumple que  $PE_1 < PE_2$ , decimos que *cumple la propiedad  $\mathcal{P}'$* .

**Lema 374.** Existe al menos un punto con la propiedad  $\mathcal{P}$ .

**Ejercicio 375.** Pruebe el lema 374 siguiendo los pasos a continuación

### 4.3. INTERSECCIÓN DE DOS CIRCUNFERENCIAS

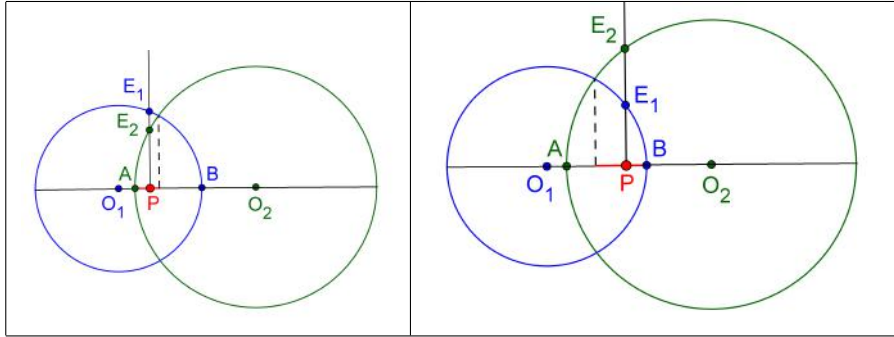


Figura 4.3.2: Propiedades  $\mathcal{P}$  y  $\mathcal{P}'$

1. Trace una semirrecta  $u$  perpendicular a  $r = AB$  de origen  $A$ . Donde  $A$  y  $B$  son los puntos como en el lema 369.
2. Muestre que existe un punto  $D$  de intersección de  $u$  con  $c_1$ . Dibuje a  $D$ .
3. Dibuje al segmento  $g = DB$ .
4. Muestre que  $g$  corta a  $c_2$  en un punto  $E$ . Dibuje a  $E$ .
5. Trace la perpendicular  $h$  a  $r$  por  $E$ . Marque el punto  $F$  pie de  $h$ .
6. Use el axioma de Pasch para mostrar que  $F$  está entre  $A$  y  $B$ .
7. Muestre que existe un punto  $G$  de intersección de  $h$  y  $c_1$ . Dibuje a  $G$ .
8. Muestre que  $E$  está entre  $G$  y  $F$ . (Note que si el segmento  $EF$  cortara a  $c_1$ ,  $E$  o  $F$  deberían estar en el exterior de  $c_1$ ).
9. Concluya la prueba.

**Lema 376.** Sean  $A$  y  $B$  como en el lema 369. Si un punto  $P$  tiene la propiedad  $\mathcal{P}$ , entonces existe un punto  $Q$  con la propiedad  $\mathcal{P}$ , tal que  $P < Q$  según el orden inducido por la semirrecta  $AB$ .

**Ejercicio 377.** Demuestre el lema 376 (sugerencia: revise la prueba del lema 374).

**Lema 378.** Sean  $A$  y  $A'$  como en el lema 369. Si un punto  $P$  tiene la propiedad  $\mathcal{P}$  entonces, todos los puntos entre  $A$  y  $P$  tienen la propiedad  $\mathcal{P}$ .

**Ejercicio 379.** Pruebe el lema 378 siguiendo los pasos a continuación.

1. Dibuje una circunferencia  $c_2$  de centro  $O_2$  que pase por un punto  $A'$ .
2. Trace la recta  $f = O_2A'$ .
3. Marque el otro punto  $A$  de intersección de  $c_2$  y  $f$ .
4. En la semirrecta  $O_2A$  marque un punto  $O_1$ .
5. Marque un punto  $P$  entre  $A$  y  $A'$ .
6. Trace una recta  $g$  perpendicular a  $f$  por  $P$ .
7. En uno de los semiplanos de borde  $f$  marque la intersección  $P_2$  de  $g$  con  $c_2$ .
8. Marque un punto  $P_1$  tal que  $P_2$  esté entre  $P_1$  y  $P$ .
9. Marque un punto  $Q$  entre  $A$  y  $P$ .
10. Trace una recta  $h$  perpendicular a  $f$  por  $Q$ .
11. En el semiplano de borde  $f$  donde está  $P_2$ , marque la intersección  $Q_2$  de  $h$  con  $c_2$ .
12. Marque un punto  $Q_1$  entre  $Q_2$  y  $Q$ .
13. Suponga para reducir el problema al absurdo que existe una circunferencia  $c_1$  de centro  $O_1$  que pasa por  $P_1$  y  $Q_1$ .
  - a) Marque los segmentos  $O_1Q_1$ ,  $O_1P_1$ , y píntelos de verde.

### 4.3. INTERSECCIÓN DE DOS CIRCUNFERENCIAS

---

- b) Marque los segmentos  $O_1Q_2$ ,  $O_1P_2$ , y píntelos de azul.
- c) Marque los segmentos  $O_2Q_2$ ,  $O_2P_2$ , y píntelos de rojo.
- d) Muestre que  $Q_2$  está en el arco  $AP_2$  que no contiene a  $A'$  (sugerencia: suponga que  $Q_2$  está en el arco  $P_2A'$  y concluya que en este caso  $Q$  estaría entre  $P$  y  $A'$ , lo cual sería absurdo).
- e) Muestre que la semirecta  $O_2Q_2$  es interior a  $\widehat{P_2O_2A}$ , congruente con  $\widehat{P_2O_2O_1}$ .
- f) Muestre que  $\widehat{O_1O_2Q_2} < \widehat{O_1O_2P_2}$ .
- g) Pruebe que  $O_1Q_2 < O_1P_2$  (sugerencia: use el teorema 227).
- h) Verifique la siguiente cadena de desigualdades de segmentos

$$O_1Q_1 < O_1Q_2 < O_1P_2 < O_1P_1$$

- i) Muestre que esto es contradictorio.

14. Concluya la prueba.

**Lema 380.** *Sea  $B$  como en el lema 369. Existe al menos un punto con la propiedad  $\mathcal{P}'$ . Si un punto  $P$  tiene la propiedad  $\mathcal{P}'$ , entonces existe un punto  $Q$  con la propiedad  $\mathcal{P}'$ , tal que  $Q < P$  y todos los puntos entre  $B$  y  $P$  tienen la propiedad  $\mathcal{P}'$ .*

**Ejercicio 381.** Pruebe el lema 380 (sugerencia: revise las pruebas de los lemas 374, 376 y 378)

**Corolario 382.** *Sean  $A$  y  $B$  como en el lema 369. Sea  $\mathcal{S}$  el conjunto de puntos  $T$  de la recta  $r = AB$  tales que existe un punto  $Q$  con la propiedad  $\mathcal{P}$  tal que  $T < Q$ , y el conjunto  $\mathcal{S}' = r - \mathcal{S}$ . Se cumple que:*

1.  $\mathcal{S}$  y  $\mathcal{S}'$  son no vacíos.
2.  $\mathcal{S}$  es abierto.

3. cualquiera de los puntos de  $\mathcal{S}$  es menor que cualquiera de los puntos de  $\mathcal{S}'$ .
4. todos los puntos con la propiedad  $\mathcal{P}$  están en  $\mathcal{S}$ .
5. todos los puntos con la propiedad  $\mathcal{P}'$  están en  $\mathcal{S}'$ .

**Ejercicio 383.** Demuestre el corolario 382.

**Teorema 384.** *Si una circunferencia tiene un punto en el interior y otro en el exterior de otra, entonces las circunferencias tendrán dos puntos en común.*

**Ejercicio 385.** Demuestre el teorema 384.

1. Dibuje los objetos del lema 369.
2. Muestre que los conjuntos  $\mathcal{S}$  y  $\mathcal{S}'$  del corolario 382, cumplen con las hipótesis del principio de Dedekind.
3. Muestre que existe un punto  $D$  que es el mínimo de  $\mathcal{S}'$ .
4. Muestre que  $D$  está en el intervalo  $AB$ .
5. Muestre que  $D$  no tiene la propiedad  $\mathcal{P}$  (note que de otro modo estaría en  $\mathcal{S}$ ).
6. Muestre que  $D$  no tiene la propiedad  $\mathcal{P}'$  (note que de otro modo no sería el mínimo de  $\mathcal{S}'$ ).
7. Concluya la prueba.

## 4.4. Construcciones con regla y compás

Esta sección se incorpora no sólo porque es una aplicación de la continuidad, sino por su gran valor histórico. Las construcciones con regla y compás constituyen un método (teórico) que indica que dados dos puntos distintos  $A$  y  $B$  siempre podemos trazar una recta que pase por ellos y también una circunferencia con centro en uno de ellos

#### 4.4. CONSTRUCCIONES CON REGLA Y COMPÁS

---

y que pase por el otro. También, a través de este método podemos saber si dos rectas construidas o una recta y una circunferencia, o dos circunferencias tienen o no intersecciones y en ese caso conocerlas. Las construcciones con regla y compás son problemas planos.

**Teorema 386.** *Dados dos puntos  $A$  y  $B$  es posible construir un triángulo equilátero  $ABC$ .*

**Ejercicio 387.** Para demostrar el teorema 386 siga los pasos a continuación

1. Dibuje los puntos  $A$  y  $B$ .
2. Dibuje las circunferencia  $c_1$  de centro  $A$  que pasa por  $B$ , y  $c_2$  de centro  $B$  que pasa por  $A$ .
3. Muestre que las circunferencias  $c_1$  y  $c_2$  deben cortarse en dos puntos  $C$  y  $D$ .
4. Demuestre que el triángulo  $ABC$  es equilátero.
5. Concluya la prueba.

**Corolario 388.** *Dados dos puntos  $A$  y  $B$  es posible construir la mediatriz del segmento  $AB$ .*

**Ejercicio 389.** Demuestre el corolario 388.

**Teorema 390.** *Dados una recta  $r$  y un punto  $P$ , es posible construir la perpendicular desde  $P$  a  $r$ .*

**Ejercicio 391.** Demuestre el teorema 390 (sugerencia: no olvide distinguir los casos en que el punto es exterior a la recta o está sobre la recta).

#### 4.4.1. Construcciones con compás antiguo y moderno

En la antigüedad el compás antiguo no servía para transportar segmentos. Es decir, una vez aplicado, el compás se cerraba. Mostraremos que las construcciones con compás antiguo son equivalentes a las construcciones con compás moderno.

**Teorema 392.** *Es posible transportar un segmento  $a$  sobre una semirrecta  $f$  con un compás antiguo.*

**Ejercicio 393.** Para probar el teorema 392 siga los pasos a continuación

1. Dibuje una semirrecta  $f$  de origen  $O$  y un segmento  $a = AB$ .
2. Arrastre el punto  $A$  hasta que  $OA > OB$ .
3. Trace la circunferencia  $c$  de centro  $O$  que pasa por  $A$  y la circunferencia  $d$  de centro  $A$  que pasa por  $O$ .
4. Marque los puntos  $C$  y  $D$  de intersección de  $c$  con  $d$  (sugerencia: muestre que existen)
5. Trace la circunferencia  $e$  de centro  $A$  que pasa por  $B$ .
6. Marque los puntos de intersección  $E$  y  $F$  de  $c$  y  $e$ .
7. Trace la circunferencia  $h$  de centro  $D$  que pasa por  $E$ .
8. Marque el punto  $G$  de intersección de  $h$  con  $d$  que es simétrico del punto  $E$  con respecto a la recta  $CD$ . Muestre que  $G$  existe.
9. Muestre que los segmentos  $OG$  y  $AE$  son congruentes.
10. Muestre que los segmentos  $OG$  y  $AB$  son congruentes.
11. Trace la circunferencia  $k$  con centro en  $O$  que pasa por  $G$ .
12. Marque la intersección  $H$  de  $k$  con  $f$ .

#### 4.4. CONSTRUCCIONES CON REGLA Y COMPÁS

---

13. Pruebe que el segmento  $OH$  es congruente con el segmento  $AB$ .
14. Concluya la prueba.

*Observación 394.* En la prueba del teorema 392 solamente usamos compás para la construcción. Es importante indicar que toda construcción con regla y compás puede realizarse solamente con compás (antiguo o moderno). Esta equivalencia de las construcciones fue primeramente demostrada por Mohr y cien años después fue realizada por Mascheroni.



# Capítulo 5

## Paralelismo

Todo aquel interesado en la historia de la geometría sabe que una de las empresas más interesantes de los matemáticos fue el intento de demostrar el postulado de las paralelas o quinto postulado de Euclides. Actualmente, a partir de los aportes de Hilbert tenemos la posibilidad de enunciar rigurosamente el problema del V postulado como sigue:

*Habiendo aceptado los axiomas enumerados en los grupos I-IV, deducir de ellos el axioma V.*

Hoy notamos que el axioma V es independiente de los axiomas anteriores, es decir, si se niega el axioma V y se lo adjunta a los axiomas I-IV, podemos aun formar un sistema lógico.

### 5.1. Axioma de las paralelas y consecuencias

**V (Axioma de las paralelas)** Sea  $a$  una recta arbitraria y  $A$  un punto exterior a ella, entonces en el plano determinado por  $A$  y la recta  $a$ , se puede trazar a lo sumo una recta que pasa por  $A$  y no corta a  $a$ .

**Teorema 395.** *Por un punto exterior a una recta  $a$  pasa exactamente una recta que no corta a  $a$  y es coplanar con  $a$ .*

**Ejercicio 396.** Pruebe el corolario 395 siguiendo los pasos a continuación.

1. Dibuje una recta  $a = AB$  y un punto  $P$  fuera de  $a$ .
2. Oculte los puntos  $A$  y  $B$ .
3. Marque un punto  $Q$  en  $a$ .
4. Dibuje el segmento  $b = PQ$ .
5. Trace el punto medio  $M$  de  $b$ .
6. Dibuje un punto  $R$  en  $a$  distinto de  $Q$ .
7. Dibuje el simétrico  $R'$  de  $R$  con respecto a  $M$ .
8. Muestre que los triángulos  $MQR$  y  $MPR'$  son congruentes.
9. Suponga, para reducir el problema al absurdo, que las rectas  $a$  y  $s = PR'$  se cortan en un punto  $S$ .
  - a) Suponga que  $P$  está entre  $R'$  y  $S$ , y que  $R$  está entre  $Q$  y  $S$ . Dibuje con el lápiz en línea de trazos la recta  $s$  y el corte de  $S$  de  $a$  y  $s$ .
  - b) Muestre que  $\widehat{QRM} \equiv \widehat{MR'P}$ .
  - c) Muestre que esto contradice el primer teorema del ángulo exterior.
10. Concluya que por cada punto dado, exterior a una recta dada, en el plano determinado por esta recta y este punto pasa *al menos una* recta que no corta a la recta dada.
11. Muestre que por cada punto dado, exterior a una recta dada, en el plano determinado por esta recta y este punto pasa *a lo sumo una* recta que no corta a la recta dada.
12. Concluya la prueba.

**Definición 397.** Dada una recta  $a$  y un punto  $A$  exterior a  $a$ , decimos que una recta  $b$  es paralela a  $a$  por  $A$  si es coplanar con  $a$  y  $A$ , y no corta a  $a$ .

## 5.2. Ángulos entre paralelas cortadas por una transversal

**Definición 398.** Sean  $a$  y  $a'$  dos rectas coplanares. Se denomina *transversal* a una recta  $t$  que es secante con  $a$  y  $a'$ .

Sean dos rectas coplanares y paralelas  $a$  y  $a'$  cortadas por una transversal  $t$  en los puntos  $A$  y  $A'$ , respectivamente (vea la figura 5.2.1). Tomemos los puntos  $B$  y  $B'$  en  $a$  y en  $a'$  respectivamente, a un lado de  $t$ ; y los puntos  $C$  y  $C'$  en  $a$  y en  $a'$  respectivamente, al otro lado de  $t$ . Tomemos el punto  $D$  tal que  $A$  está entre  $D$  y  $A'$ , y el punto  $D'$  tal que  $A'$  está entre  $D'$  y  $A$ . Obtenemos ocho ángulos, cuatro en cada punto de intersección, nombrados de la manera siguiente:

1.  $\widehat{BAA'}$  y  $\widehat{C'A'A}$ ,  $\widehat{B'A'A}$  y  $\widehat{CAA'}$  son *alternos internos* entre paralelas cortadas por una transversal. Pintados en rojo en la figura 5.2.1.
2.  $\widehat{BAD}$  y  $\widehat{C'A'D'}$ ,  $\widehat{B'A'D'}$  y  $\widehat{CAD}$  son *alternos externos* entre paralelas cortadas por una transversal. Pintados en azul en la figura 5.2.1.
3.  $\widehat{BAA'}$  y  $\widehat{B'A'D'}$ ,  $\widehat{D'A'A}$  y  $\widehat{BAD}$ ,  $\widehat{CAA'}$  y  $\widehat{C'A'D'}$ ,  $\widehat{C'A'A}$  y  $\widehat{CAD}$  son *correspondientes* entre paralelas cortadas por una transversal. Pintados en verde en la figura 5.2.1.
4.  $\widehat{CAA'}$  y  $\widehat{C'A'A}$ ,  $\widehat{BAA'}$  y  $\widehat{AA'B'}$  son *conjugados internos* entre paralelas cortadas por una transversal.
5.  $\widehat{CAD}$  y  $\widehat{C'A'D'}$ ,  $\widehat{DAB}$  y  $\widehat{D'A'B'}$  son *conjugados externos* entre paralelas cortadas por una transversal.

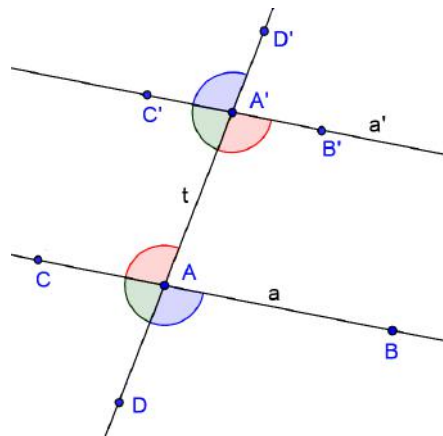


Figura 5.2.1: Ángulos formados por paralelas cortadas por una transversal

**Teorema 399.** *Los ángulos alternos internos entre paralelas cortadas por una transversal son congruentes. Además, si dos rectas al ser cortadas por una transversal forman ángulos alternos internos iguales, son paralelas.*

**Ejercicio 400.** Demuestre el teorema 399 siguiendo los pasos a continuación.

1. Dibuje una recta  $a = AB$ .
2. Dibuje un punto  $A'$  exterior a  $a$ .
3. Trace una paralela  $a'$  a  $a$  por  $A'$ .
4. Trace la transversal  $b = AA'$ .
5. Marque un punto  $C$  sobre  $a'$ , al otro lado de  $B$  con respecto a  $b$ .
6. Suponga, para reducir el problema al absurdo, que los ángulos  $\widehat{BAA'}$  y  $\widehat{CA'A}$  no son congruentes.

## 5.2. PARALELAS Y UNA TRANSVERSAL

---

- a) Dibuje un punto  $D$  del otro lado de  $B$  con respecto a  $b$  de tal modo que  $\widehat{BAA'}$  y  $\widehat{DA'A}$  sean congruentes. Verifique que  $D$  no puede estar en  $a'$ .
  - b) Suponga, para reducir el problema al absurdo, que la recta  $c = DA'$  corta a  $a$  en el punto  $S$  que se encuentra del mismo lado que  $B$  con respecto a  $b$ . Dibuje con lápiz a  $c$  y marque a  $S$ .
  - c) Muestre que se contradice el primer teorema del ángulo exterior aplicado al triángulo  $AA'S$ .
  - d) Considere el caso en que  $S$  se encuentre del otro lado que  $B$  con respecto a  $b$ .
  - e) Concluya que  $c$  es otra paralela a  $a$  por  $A'$ .
  - f) Muestre que esto contradice el axioma de las paralelas.
7. Concluya que los ángulos alternos internos entre paralelas cortadas por una transversal son congruentes.
  8. Para mostrar que si dos rectas, al ser cortadas por una transversal forman ángulos alternos internos iguales, son paralelas; opere como en el ítem 6b.
  9. Concluya la prueba.

**Corolario 401.** *Los ángulos alternos externos entre paralelas cortadas por una transversal son congruentes. Asimismo, los ángulos correspondientes entre paralelas cortadas por una transversal son congruentes. En cambio, los ángulos conjugados internos entre paralelas cortadas por una transversal son suplementarios, lo mismo que los conjugados externos entre paralelas cortadas por una transversal.*

**Ejercicio 402.** Pruebe el corolario 401 usando el teorema 399 y el teorema 164.

### 5.3. Proposiciones equivalentes al axioma de las paralelas

En esta sección estudiamos proposiciones o enunciados equivalentes al axioma de las paralelas. Por esta razón, en algunos casos, no suponemos el axioma de las paralelas en las demostraciones.

#### El quinto postulado de Euclides

Con la intención de sintetizar la geometría plana, Euclides fundamentó la geometría exponiendo un grupo de axiomas y postulados, de los cuales el más famoso es el quinto postulado que en su versión original dice:

Y que cada vez que una recta, al intersectar otras dos, forme a un mismo lado ángulos internos cuya suma sea menor que dos rectos, dichas dos rectas se intersectarán en aquel lado en el cual esta suma es menor que dos rectos. [Efimov, 1984]

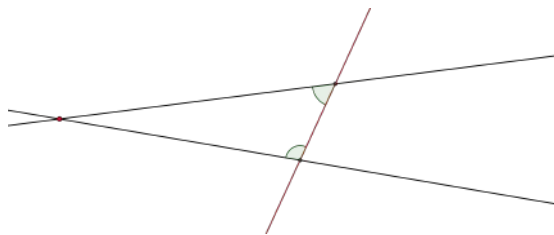


Figura 5.3.1: Postulado V de Euclides

**Teorema 403.** *Si se asume el quinto postulado de Euclides tiene lugar el axioma de las paralelas.*

**Ejercicio 404.** Pruebe el teorema 403 siguiendo los pasos a continuación.

1. Dibuje una recta  $a = AB$  y un punto  $P$  fuera de  $a$ .

### 5.3. PROPOSICIONES EQUIVALENTES

---

- Trace la perpendicular  $b$  a  $a$  por  $P$ . Sea  $C$  el pie de la perpendicular.
- Trace la perpendicular  $c$  a  $b$  por  $P$ .
- Pruebe que  $c$  es una paralela a  $a$  por  $P$ .
- Pruebe que otra recta distinta de  $c = DP$  (que pase por  $P$ ) debe formar con  $b$  a uno de sus lados un ángulo agudo. Dibuje a  $c$  y suponga que  $\alpha = \widehat{CPD}$  es agudo.
- Use el postulado de Euclides para mostrar que  $a$  y  $d$  deben cortarse.
- Concluya la prueba.

**Teorema 405.** *Si se asume el axioma de las paralelas tiene lugar el quinto postulado de Euclides.*

**Ejercicio 406.** Pruebe el teorema 405 siguiendo los pasos a continuación.

- Dibuje una recta  $a = AB$  y un punto  $P$  fuera de  $a$ .
- Trace una recta  $b = AP$ .
- Marque un punto  $C$  interior al ángulo  $\widehat{BAP}$  de tal modo que  $\widehat{BAP} + \widehat{APC} < \pi$  (repase esta notación).
- Trace una recta  $c = PC$ . Observe que las rectas  $a$  y  $c$  cortadas por la transversal  $b$ , determinan para un lado de  $b$  ángulos internos cuya suma es menor que dos rectos.
- Marque un punto  $D$  interior al ángulo  $\widehat{BAP}$  de tal modo que  $\widehat{BAP} + \widehat{APD} = \pi$ .
- Trace una recta  $d = PD$ .
- Dibuje un punto  $E$  sobre  $d$ , de tal modo que  $P$  esté entre  $E$  y  $D$ .

8. Muestre que  $\widehat{BAP} \equiv \widehat{APE}$ .
9. Pruebe que  $a$  y  $d$  no se cortan (sugerencia: suponga por el absurdo que se cortan, primero a un lado de  $b$  y luego en el otro lado. Use el teorema 209).
10. Muestre que  $a$  y  $c$  se cortan (observe que si no se cortaran contradiría el axioma de las paralelas).
11. Dibuje un punto  $F$  sobre  $c$ , de tal modo que  $P$  esté entre  $F$  y  $C$ .
12. Suponga por el absurdo que las rectas  $a$  y  $c$  se cortan en un punto  $G$  del lado de  $F$  con respecto a  $b$ .
  - a) Muestre que la semirrecta  $PC$  corta al segmento  $DA$ .
  - b) Muestre que  $D$  y  $A$  están a distinto lado con respecto a  $c$ .
  - c) Muestre que la semirrecta  $PE$  está del mismo lado que  $A$  con respecto a  $c$ .
  - d) Muestre que  $d$  debe cortar al segmento  $GA$ .
  - e) Concluya con el absurdo.
13. Concluya la prueba.

### 5.3.1. La suma de los ángulos interiores de un triángulo

**Teorema 407.** *Si la suma de los ángulos interiores de cada triángulo suma dos rectos, tiene lugar el axioma de las paralelas.*

**Ejercicio 408.** Pruebe el teorema 407 siguiendo los pasos a continuación.

1. Trace el segmento  $a = AB$ .
2. Trace las rectas  $b$  y  $b'$  perpendiculares a  $a$  por  $B$  y por  $A$  respectivamente.

### 5.3. PROPOSICIONES EQUIVALENTES

---

3. Sobre uno de los lados  $\alpha$  de la prolongación de  $a$ , marque el punto  $C$  sobre  $b'$ .
4. Sobre  $\alpha$  y sobre  $b$  tome el punto  $B_1$  de tal modo que  $BA \equiv BB_1$ , como indica la figura 5.3.2.
5. Pruebe, bajo la hipótesis que la suma de los ángulos interiores de todo triángulo es igual a dos rectos, que

$$\widehat{BB_1A} \equiv \widehat{BAB_1} \equiv \widehat{B_1AC} = \frac{\pi}{4}$$

6. Sobre la semirrecta opuesta a la  $B_1B$  tome el punto  $B_2$  de tal modo que  $B_1B_2 \equiv AB_1$ .
7. Pruebe que

$$\widehat{B_1B_2A} \equiv \widehat{B_1AB_2} \equiv \widehat{B_2AC} = \frac{\pi}{8}$$

8. Sobre la semirrecta opuesta a la  $B_2B_1$  tome el punto  $B_3$  de tal modo que  $B_2B_3 \equiv AB_2$ .
9. Pruebe que

$$\widehat{B_2B_3A} \equiv \widehat{B_2AB_3} \equiv \widehat{B_3AC} = \frac{\pi}{16}$$

10. Generalice el procedimiento bosquejado en los ítems anteriores y pruebe que para el paso  $n$

$$\widehat{B_{n-1}B_nA} \equiv \widehat{B_{n-1}AB_n} \equiv \widehat{B_nAC} = \frac{\pi}{2^{n+1}}$$

11. Pruebe que si una recta  $r$ . forma con la semirrecta  $AB$  hacia el lado  $\alpha$  un ángulo agudo  $\beta$  debe existir un valor  $n$  tal que

$$\widehat{BAB_n} > \beta$$

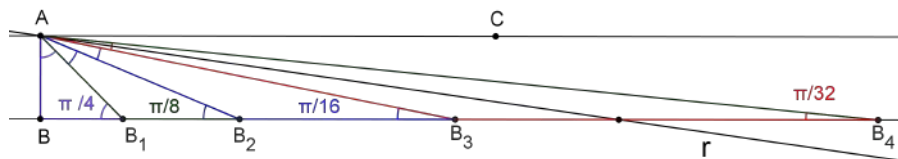


Figura 5.3.2: La suma de los ángulos interiores y el axioma de las paralelas

12. Muestre que  $r$  corta a la recta  $b$  (sugerencia: vea el teorema 109).
13. Concluya la prueba.

**Definición 409.** Designamos por  $S(\Delta)$  la suma de los ángulos interiores de un triángulo  $\Delta$ , y por  $D(\Delta)$  la diferencia entre dos rectos y dicha suma, de forma que

$$D(\Delta) = \pi - S(\Delta)$$

Esta diferencia suele decirse el *defecto del triángulo*.

**Lema 410.** *En cada triángulo la suma de dos ángulos es menor que dos rectos.*

**Ejercicio 411.** Pruebe el lema 410 (sugerencia: revise la prueba del teorema 209).

**Lema 412.** *Para cada triángulo es posible construir uno nuevo que tenga la misma suma de ángulos internos que el dado y con uno de sus ángulos al menos dos veces menor que algún ángulo prefijado del triángulo dado. En general, para cada triángulo es posible construir uno nuevo que tenga la misma suma de ángulos internos que el dado y para cada real positivo  $\varepsilon$ , uno de sus ángulos de amplitud menor que  $\varepsilon$ .*

**Ejercicio 413.** Pruebe el lema 412 siguiendo los pasos a continuación.

### 5.3. PROPOSICIONES EQUIVALENTES

---

1. Dibuje el triángulo  $ABC$  de lados correspondientes  $a$ ,  $b$  y  $c$ .
2. Marque el punto medio  $O$  del lado  $a$ .
3. Marque el simétrico  $A'$  de  $A$  con respecto a  $O$ .
4. Trace el segmento  $d = AA'$ .
5. Marque los ángulos  $\alpha_1 = \widehat{BAO}$  y  $\alpha_2 = \widehat{OAC}$ .
6. Muestre que  $\alpha_1$  o  $\alpha_2$  debe ser menor o igual que la mitad del ángulo en  $A$  (sugerencia: suponga para reducir el problema al absurdo que ambos son mayores estrictos que el ángulo en  $A$ ).
7. Suponga que  $\alpha_2 \leq \alpha_1$ .
  - a) Trace el segmento  $e = A'C$ .
  - b) Marque los ángulos  $\beta = \widehat{ABC}$ ,  $\gamma_1 = \widehat{ACB}$ ,  $\gamma_2 = \widehat{BCA'}$  y  $\alpha' = \widehat{AA'C}$ .
  - c) Pruebe que
$$\begin{aligned} S(ABC) &= \alpha_1 + \alpha_2 + \beta + \gamma_1 \\ S(AA'C) &= \alpha_2 + \alpha' + \gamma_1 + \gamma_2 \end{aligned}$$
  - d) Pruebe que los triángulos  $ABO$  y  $COA'$  son congruentes.
  - e) Pruebe que
$$\alpha' = \alpha_1, \gamma_2 = \beta$$
  - f) Pruebe que  $\alpha' + \alpha_2$  es igual al ángulo en  $A$ .
8. Resuelva para el caso en que  $\alpha_1 < \alpha_2$ .
9. Concluya la primera parte de la prueba.
10. Construya una herramienta para dados tres puntos no alineados  $A$ ,  $B$  y  $C$  encontrar un punto  $A'$  tal que sea el simétrico de  $A$  con respecto al punto medio del lado  $a$  (como en el lema 412).

11. Suponga que el ángulo  $\widehat{A'AC} \leq \widehat{A'AB}$ . Sea  $\alpha = \widehat{BAC}$ . Muestre que el triángulo  $ACA'$  tiene un ángulo (en este caso  $\alpha_2$ ), que es menor o igual que  $\alpha/2$ .
12. Use la herramienta para generar un punto  $A''$  considerando el triángulo  $AA'C$ .
13. Trace el segmento  $AA''$  y el punto medio  $O'$  de  $A'C$ .
14. Suponga que el ángulo  $\widehat{A'AA''} \leq \widehat{A''AC}$ . Muestre que el triángulo  $A''AA'$  tiene un ángulo que es menor o igual que  $\alpha/4$ .
15. Pruebe que los triángulos  $ACO'$  y  $A''O'A'$  son congruentes.
16. Pruebe que la suma de los ángulos interiores de los triángulos  $AA'A''$ ,  $AA'C$  y  $ABC$  es la misma.
17. Use la herramienta para generar un punto  $A'''$  considerando el triángulo  $AA'A''$ .
18. Trace el segmento  $AA'''$  y el punto medio  $O''$  de  $A''A'$ .
19. Suponga que el ángulo  $\widehat{A''AA'''} \leq \widehat{A'AA''}$ . Muestre que el triángulo  $A''AA'''$  tiene un ángulo que es menor o igual que  $\alpha/8$ .
20. Pruebe que los triángulos  $AA'O''$  y  $A'''O''A''$  son congruentes.
21. Pruebe que la suma de los ángulos interiores de los triángulos  $AA''A'''$ ,  $AA'A''$ ,  $AA'C$  y  $ABC$  es la misma.
22. Continúe inductivamente el proceso para mostrar que dado un triángulo cualquiera  $ABC$ , el paso  $n$ -ésimo de este proceso construirá un triángulo con un ángulo menor que uno prefijado, pero que el triángulo resultante tendrá la misma suma que  $ABC$ .
23. Concluya la prueba.

**Teorema 414.** *En cada triángulo*

$$S(\Delta) \leq \pi$$

**Ejercicio 415.** Pruebe el teorema 414 siguiendo los pasos a continuación.

1. Suponga para reducir el problema al absurdo que existe un triángulo  $\Delta = ABC$  tal que la suma de los ángulos interiores es  $\pi + \varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ .
  - a) Muestre que existe un triángulo  $\Delta'$  con la misma suma de los ángulos interiores que  $\Delta$ , pero con un ángulo  $\delta < \varepsilon$  (sugerencia: use el lema 412).
  - b) Muestre la suma de los ángulos interiores de  $\Delta'$  es menor que  $\pi + \delta$  (sugerencia: use el lema 410).
  - c) Muestre que esto es un absurdo.
2. Concluya la prueba.

**Lema 416.** Si el triángulo  $ABC$  se divide en dos por la recta  $BP$ , con  $P$  un punto en el lado  $BC$  defecto de  $ABC$  será igual a la suma de los defectos de los triángulos  $ABP$  y  $BPC$ .

**Ejercicio 417.** Pruebe el lema 416 siguiendo los pasos a continuación.

1. Dibuje un triángulo  $ABC$  y un punto  $P$  en el lado  $b$ .
2. Marque los ángulos  $\alpha = \widehat{BAC}$ ,  $\beta_1 = \widehat{ABP}$ ,  $\delta_1 = \widehat{BPA}$ . Píntelos de verde.
3. Marque los ángulos  $\gamma = \widehat{ACB}$ ,  $\beta_2 = \widehat{PBC}$ ,  $\delta_2 = \widehat{BPC}$ . Píntelos de rojo.
4. Pruebe que

$$\begin{aligned} D(ABP) &= \pi - (\alpha + \beta_1 + \delta_1) \\ D(BPC) &= \pi - (\beta_2 + \delta_2 + \gamma) \end{aligned}$$

5. Pruebe que  $\pi = \delta_1 + \delta_2$

6. Pruebe que

$$D(ABC) = D(ABP) + D(BPC) = \pi - (\alpha + \beta_1 + \beta_2 + \gamma)$$

7. Concluya la prueba.

**Lema 418.** Sean dos triángulos  $ABC$  y  $AB_1C_1$  con vértice común  $A$ , y tales que los vértices  $B_1$  y  $C_1$  del segundo se encuentran respectivamente en los lados  $AB$  y  $AC$  del primero. Entonces el defecto del segundo triángulo no supera al del primero.

**Ejercicio 419.** Pruebe el lema 418 (sugerencia: dibuje la situación y agregue el segmento  $C_1B$ . Aplique el lema 416 a los tres triángulos que han quedado formados).

**Lema 420.** Sean dados dos triángulos rectángulos  $ABC$  (ángulo recto en  $B$ ) y  $A'B'C'$  (ángulo recto en  $B'$ ), tales que los catetos  $AB$  y  $BC$  del  $ABC$  son mayores que los catetos  $A'B'$  y  $B'C'$  del  $A'B'C'$ , respectivamente. Entonces, si la suma de los ángulos internos del triángulo  $ABC$  es igual a dos rectos, entonces también lo será los del triángulo  $A'B'C'$ .

**Ejercicio 421.** Pruebe el lema 420 siguiendo los pasos a continuación.

1. Dibuje dos triángulos rectángulos  $ABC$  y  $A'B'C'$  como en las hipótesis del lema. Cuide que los triángulos tengan igual sentido en la notación de sus vértices.
2. Arrastre el triángulo  $A'B'C'$  hasta que  $B$  coincida con  $B'$ ,  $C'$  se encuentre en el lado  $BC$  y  $A'$  se encuentre en el lado  $AB$  (sugerencia: use las herramientas “Mueve” y “Rotación” en torno a un punto).
3. Agregue el segmento  $CA'$  al dibujo.
4. Use el lema 418 para mostrar que  $D(A'B'C') \leq D(ABC)$ .
5. Concluya la prueba.

**Definición 422.** Dados cuatro puntos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  coplanares, no alineados de a tres, decimos que estos cuatro puntos determinan un *cuadrilátero*  $ABCD$ . A los segmentos  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  y  $AD$  los llamamos *lados*, a  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$ , *vértices* y a los segmentos  $AC$  y  $BD$ , *diagonales*. Decimos que los lados  $AB$  y  $CD$  son *opuestos*, como así también los lados  $BC$  y  $DA$ . A los lados con un extremo en común lo llamamos *adyacentes*.

Un cuadrilátero es *convexo* si cada lado se encuentra a un mismo lado con respecto a la prolongación del lado opuesto. En un cuadrilátero convexo  $ABCD$ , a los ángulos  $\widehat{ABC}$ ,  $\widehat{BCD}$ ,  $\widehat{CDA}$  y  $\widehat{DAB}$  los llamamos *interiores*.

Un rectángulo es un cuadrilátero con los ángulos internos rectos.

**Lema 423.** *Si la suma de los ángulos interiores de un triángulo rectángulo es igual a dos rectos, entonces lo será la de cualquier otro triángulo rectángulo.*

**Ejercicio 424.** Pruebe el lema 423 siguiendo los pasos a continuación.

1. Dibuje un triángulo  $ABC$ , rectángulo en  $A$ . Suponga que la suma de los ángulos interiores de  $ABC$  es  $\pi$ .
2. Obtenga un cuadrilátero  $ABCA'$  por medio de adjuntar al triángulo  $ABC$  su simétrico con respecto al punto medio  $D$  del lado  $a$ .
3. Pruebe que  $ABCA'$  tiene todos los ángulos interiores rectos, es decir,  $ABCA'$  es un rectángulo con lados opuestos congruentes.
4. Pruebe que si tenemos un rectángulo con lados opuestos congruentes y le adjuntamos su simétrico con respecto al punto medio de cualquiera de sus lados, obtenemos otro rectángulo.
5. Muestre que si a un rectángulo con lados opuestos congruentes se lo divide por una diagonal se obtiene dos triángulos rectángulos congruentes con suma igual a dos rectos.

6. Diseñe un procedimiento para construir un triángulo rectángulo cuya suma de sus ángulos interiores sea dos rectos y sus lados más largos que cualquier longitud dada, teniendo un triángulo rectángulo dado de suma de sus ángulos interiores igual a dos rectos.
7. Concluya la prueba.

**Teorema 425.** *Si la suma de los ángulos de al menos un triángulo es igual a dos rectos, también lo será la de cualquier otro triángulo.*

**Ejercicio 426.** Pruebe el teorema 425 siguiendo los pasos a continuación.

1. Marque tres puntos no alineados  $A$ ,  $B$  y  $C$  y las rectas  $a = BC$ ,  $b = AC$  y  $c = AB$ .
2. Pruebe que el triángulo  $ABC$  puede descomponerse en dos triángulos rectángulos, por ejemplo  $ADB$  y  $ADC$ . Dibuje la situación (sugerencia: vea la proposición 216)
3. Suponga que la suma de los ángulos del triángulo  $ABC$  es igual a dos rectos.
4. Pruebe que los triángulos  $ADC$  y  $ADB$  tienen defecto cero (sugerencia: vea el lema 416).
5. Marque tres puntos no alineados  $A'$ ,  $B'$  y  $C'$  y las rectas  $a' = B'C'$ ,  $b' = A'C'$  y  $c' = A'B'$ .
6. Pruebe que el triángulo  $A'B'C'$  puede descomponerse en dos triángulos rectángulos, por ejemplo  $A'D'B'$  y  $A'D'C'$ . Dibuje la situación (sugerencia: vea la proposición 216).
7. Pruebe que  $D(A'B'D') = 0$  y  $D(C'A'D') = 0$  (sugerencia: vea el lema 423).
8. Pruebe que  $D(A'B'C') = 0$ .

9. Concluya la prueba

**Proposición 427.** *El axioma de las paralelas implica que la suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a dos rectos.*

**Ejercicio 428.** Demuestre la proposición 427 siguiendo los pasos a continuación

1. Marque los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$  no alineados.
2. Trace las rectas  $a = BC$ ,  $b = AC$  y  $c = AB$ .
3. Por  $C$  trace la paralela  $d$  a  $c$ .
4. Marque un punto  $D$  sobre  $d$  que esté del otro lado de  $A$  con respecto a  $a$ .
5. Marque un punto  $E$  sobre  $d$  que esté del mismo lado de  $A$  con respecto a  $a$ .
6. Suponga, para reducir el problema al absurdo, la existencia de una semirrecta  $e$ , distinta de la semirrecta  $CD$ , de origen  $C$  del otro lado de la semirrecta  $BA$  con respecto a  $a$ , tal que determine con la semirrecta  $CB$ , un ángulo congruente con  $\widehat{ABC}$ .
  - a) Dibuje la supuesta semirrecta  $e$ .
  - b) Muestre que la prolongación de  $e$  debe cortar a  $c$  en un punto  $G$  (sugerencia: use el axioma de las paralelas)
  - c) Muestre que se contradice el teorema 209, ya sea que  $G$  se encuentre del mismo lado o al otro lado de  $A$  con respecto a  $B$  (en  $c$ ).
7. Muestre que  $CD$  es la única semirrecta tal que  $\widehat{ABC}$  es congruente con  $\widehat{BCD}$ .
8. Muestre que  $\widehat{BAC}$  es congruente con  $\widehat{ACE}$ .
9. Muestre que  $\widehat{BAC} + \widehat{ACB} + \widehat{ABC} \equiv \widehat{ACE} + \widehat{ACB} + \widehat{BCD}$

10. Concluya la prueba.

**Corolario 429.** (*Segundo teorema del ángulo exterior*) Si se asume el axioma de las paralelas, se deduce que “en todo triángulo, un ángulo exterior es igual a la suma de los ángulos interiores no adyacentes”.

**Ejercicio 430.** Pruebe el corolario 429.

### 5.3.2. Perpendiculares levantadas desde un lado de un ángulo agudo

**Ejercicio 431.** Encuentre el error en la prueba a continuación, donde se pretende demostrar que existe un triángulo rectángulo con defecto 0.

1. Dibuje un ángulo agudo  $\widehat{AOB}$ , de lados  $a = OA$  y  $b = OB$ , tal que  $\widehat{BAO}$  sea recto.
  2. Suponga para reducir el problema al absurdo que  $D(OAB) = \varepsilon > 0$ .
    - a) Dibuje un punto  $A_1$  simétrico de  $O$  respecto de  $A$ .
    - b) Pruebe que  $D(OBA_1) = 2\varepsilon$ .
    - c) Levante una perpendicular  $d$  desde  $A_1$  a  $a$ .
    - d) Marque el punto  $B_1$  de corte de  $d$  con  $b$ .
    - e) Muestre que  $D(OA_1B_1) \geq 2\varepsilon$ .
    - f) Dibuje un punto  $A_2$  simétrico de  $O$  respecto de  $A_1$ .
    - g) Pruebe que  $D(OB_1A_2) \geq 4\varepsilon$ .
    - h) Levante una perpendicular  $d_1$  desde  $A_2$  a  $a$ .
    - i) Marque el punto  $B_2$  de corte de  $d_1$  con  $b$ .
    - j) Muestre que  $D(OA_2B_2) \geq 4\varepsilon$ .

### 5.3. PROPOSICIONES EQUIVALENTES

---

- k) Muestre que si se continúa el procedimiento bosquejado en los ítem anteriores, se llegaría a construir una sucesión de  $A_i$  y  $B_i$ , para cualquier  $i = 1, 2, \dots$
- l) Pruebe que para el paso  $n$  se tendría  $D(OA_nB_n) \geq 2^n \varepsilon$ .
- m) Pruebe que puede encontrarse un  $n$  suficientemente grande de tal modo que  $2^n \varepsilon > \pi$ .
- n) Concluya que esto lleva a un absurdo con la definición de defecto.

3. Concluya que  $\varepsilon = 0$ .

**Teorema 432.** *Si existe un ángulo agudo tal que la perpendicular levantada desde cualquier punto de uno de sus lados corta al otro lado, entonces tiene lugar el axioma de las paralelas.*

**Ejercicio 433.** Pruebe el teorema 432. Una perpendicular levantada desde un lado de un ángulo, ¿tiene que cortar **necesariamente** el otro lado del ángulo? (sugerencia: vea el ejercicio 431)

**Definición 434.** Un *cuadrilátero de Saccheri*  $AA'B'B$  tiene ángulos rectos en la base  $AB$  y los lados  $AA'$  y  $BB'$  son congruentes.

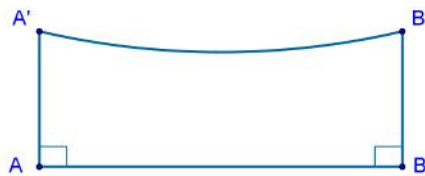


Figura 5.3.3: Cuadrilátero de Saccheri

**Proposición 435.** *El cuadrilátero de Saccheri tiene los ángulos de la base superior congruentes. Si los ángulos de la base superior fueran rectos se debería aceptar el axioma de las paralelas y recíprocamente.*

**Ejercicio 436.** Pruebe la proposición 435 siguiendo los pasos a continuación.

1. Dibuje un cuadrilátero de Saccheri de base inferior  $AB$  y de base superior  $A'B'$ .
2. Pruebe que los triángulos  $A'AB$  y  $B'BA$  son congruentes.
3. Pruebe que los segmentos  $A'B$  y  $B'A$  son congruentes
4. Pruebe que los triángulos  $A'AB'$  y  $B'BA'$  también lo son.
5. Pruebe que los ángulos de la base superior de este cuadrilátero de Saccheri son congruentes.
6. Muestre que si los ángulos de la base superior son rectos los triángulos,  $AA'B'$  y  $BB'A$  son congruentes. Concluya que la suma de los ángulos interiores de estos últimos debe dar  $\pi$ .
7. Pruebe que si los ángulos de la base superior del cuadrilátero de Saccheri fueran rectos, se debería aceptar el axioma de las paralelas (sugerencia: vea el teorema 427).
8. Pruebe que si los ángulos de la base superior del cuadrilátero de Saccheri fueran agudos, se contradiría el axioma de las paralelas.
9. Concluya la prueba.

## 5.4. Paralelismo en el espacio

**Lema 437.** Sean dos rectas paralelas  $a$  y  $a'$  en un plano  $\alpha$  y sea un punto  $P$  fuera de  $\alpha$ . Si  $A$  es un punto cualquiera en  $a$ , entonces la recta  $PA$  es alabeada con  $a'$ . Más aún, si  $\beta$  es el plano determinado por  $a$  y  $P$ , y  $\gamma$  es el plano determinado por  $a'$  y  $P$ , la recta  $c$  intersección de  $\beta$  y  $\gamma$  es paralela a  $a$  y a  $a'$ .

**Ejercicio 438.** Pruebe el lema 437 (sugerencia: para la primera parte, use el criterio de rectas alabeadas (teorema 19). Para la segunda parte del teorema note que  $c$  es coplanar tanto con  $a$  como con  $a'$ ).

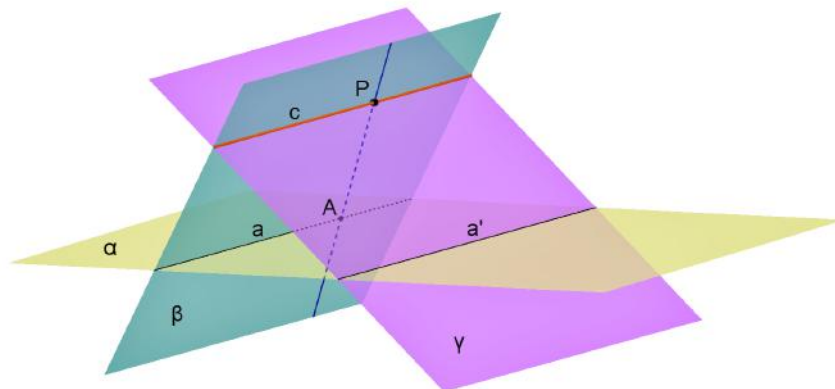


Figura 5.4.1: Paralelismo en el espacio

**Teorema 439.** *Si la recta  $a$  es paralela a la recta  $b$  y a la recta  $b'$ , entonces  $b$  y  $b'$  son paralelas o coincidentes.*

**Ejercicio 440.** Demuestre el teorema 439 siguiendo los pasos a continuación.

1. Para probar el caso de que las rectas  $a$ ,  $b$  y  $b'$  sean no coplanares siga los pasos a continuación.
  - a) Abra una hoja de GeoGebra en una vista 3D. Oculte los ejes cartesianos.
  - b) Trace dos rectas paralelas  $a$ ,  $b$  en el  $\alpha =$  plano  $xy$ .
  - c) Marque un punto  $P$  que no esté en  $\alpha$ .
  - d) Trace por  $P$  una recta  $b'$  paralela a  $a$ .
  - e) Muestre que la paralela a  $b$  por  $P$  debe estar en la intersección del plano  $\beta$  determinado por  $a$  y  $P$ , y el plano  $\gamma$  determinado por  $b$  y  $P$  (sugerencia: use el lema 437).
  - f) Concluya la prueba para este caso.
2. Para el caso en que las rectas son coplanares siga los pasos a continuación.

- a) Arrastre el punto  $P$  al plano  $\alpha$ .
- b) Suponga para reducir el problema al absurdo que las rectas  $b$  y  $b'$  se cortan en un punto  $Q$ . Concluya que por  $Q$  pasan dos rectas distintas que no cortan a  $a$ .
- c) Concluya la prueba para este caso.

3. Concluya la prueba.

**Corolario 441.** *Sea  $\mathcal{R}$  el conjunto de todas las rectas. Definimos la relación  $r, s \in \mathcal{R}$ ,  $r \sim s$  si y sólo si  $r$  es paralela a  $s$  o,  $r$  y  $s$  son coincidentes. Esta relación es de equivalencia.*

**Ejercicio 442.** Pruebe el corolario 441.

**Teorema 443.** *Por un punto exterior a un plano pasa un único plano paralelo a dicho plano.*

**Ejercicio 444.** Demuestre el teorema 443 siguiendo los pasos a continuación.

1. Abra una hoja de GeoGebra en una vista 3D. Oculte los ejes cartesianos.
2. Marque un punto  $A$  que no esté en el plano  $xy$ .
3. Dibuje una recta  $a$  perpendicular al plano  $xy$  por  $A$ . Dibuje el punto  $B$  pie de la perpendicular.
4. Para probar la **existencia** siga los pasos a continuación.
  - a) Trace un plano  $\beta$  perpendicular a  $a$  por  $A$ .
  - b) Suponga, para reducir el problema al absurdo, que existe un punto  $C$  en común a los planos  $xy$  y  $\beta$ .
    - 1) Dibuje un punto  $C$  sobre alguno de los dos planos.
    - 2) Trace los segmentos  $b = BC$  y  $c = AC$ .
    - 3) Muestre que  $b$  y  $c$  son perpendiculares a  $a$ .

- 4) Concluya que esto lleva a un absurdo.
5. Oculte el punto  $C$  y los segmentos  $b$  y  $c$ .
6. Para probar la **unicidad** siga los pasos a continuación. Suponga, para reducir el problema al absurdo, que existe otro plano  $\gamma$  que pasa por  $A$  y que también es paralelo a  $xy$ .
  - a) Trace un plano  $\gamma$ , distinto de  $\beta$  que pasa por  $A$ .
  - b) Pruebe que debe existir un punto  $D$  que está en  $\beta$  y no en  $\gamma$ . Dibuje a  $D$ .
  - c) Trace el plano  $\delta$  que pasa por  $A$ ,  $B$  y  $D$ .
  - d) Trace las rectas  $e$ ,  $f$  y  $g$  de intersección de los planos  $xy$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  con  $\delta$ , respectivamente.
    - 1) Pruebe que por  $A$  pasarían dos rectas paralelas a la recta  $e$ .
    - 2) Concluya que esto es absurdo.
7. Concluya la prueba.

**Proposición 445.** *Dadas dos rectas alabeadas hay un segmento perpendicular a ambas.*

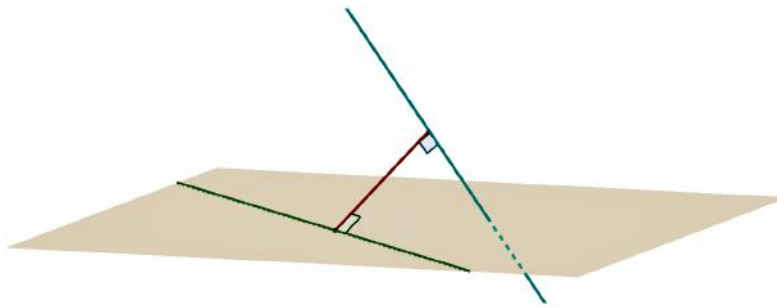


Figura 5.4.2: Segmento perpendicular a rectas alabeadas

**Ejercicio 446.** Pruebe la proposición 445 siguiendo los pasos a continuación.

1. Abra una hoja de GeoGebra en una vista 3D. Oculte los ejes cartesianos.
2. Dibuje dos rectas alabeadas  $a$  y  $b$  (sugerencia: vea el criterio de rectas alabeadas, teorema 19).
3. Dibuje un punto  $A$  sobre  $b$ .
4. Trace una paralela  $c$  a  $a$  por  $A$ .
5. Trace el plano  $\alpha$  que contiene a  $b$  y a  $c$ .
6. Dibuje un punto  $B$  en  $a$ .
7. Trace la perpendicular  $d$  a  $\alpha$  por  $B$ . Marque el punto  $C$  pie de la perpendicular.
8. Marque la paralela  $e$  a  $a$  que pasa por  $C$ .
9. Pruebe que las rectas  $a$ ,  $c$  y  $e$  son paralelas. Píntelas de rojo.
10. Pruebe que  $c$  y  $e$  están sobre  $\alpha$ .
11. Pruebe que  $d$  es perpendicular a  $a$  y  $e$  (sugerencia: vea el teorema 399).
12. Muestre que existe un punto  $D$  de corte de  $e$  y  $b$ . Dibuje a  $D$ .
13. Trace la perpendicular  $f$  a  $a$  por  $D$ . Marque el pie  $E$  de la perpendicular.
14. Muestre que las rectas  $a$ ,  $d$ ,  $e$  y  $f$  están sobre un mismo plano.
15. Pruebe que  $d$  y  $f$  son paralelas.
16. Use el teorema 399 para mostrar que los triángulos  $BED$  y  $BCD$  son congruentes.

17. Trace la paralela  $g$  a  $b$  por  $C$ .
18. Muestre que las rectas  $b$ ,  $c$ ,  $e$  y  $g$  están sobre  $\alpha$ .
19. Pruebe que existe un punto  $F$  de corte de  $c$  y  $g$ . Dibuje a  $F$ .
20. Muestre que los triángulos  $ADC$  y  $AFC$  son congruentes.
21. Pruebe que los segmentos  $FA$ ,  $CD$  y  $BE$  son congruentes y paralelos.
22. Muestre que los triángulos  $AEF$  y  $BEF$  son congruentes.
23. Pruebe que los segmentos  $AE$  y  $FB$  son congruentes.
24. Pruebe que los triángulos  $FCB$  y  $ADE$  son congruentes y rectángulos.
25. Concluya la prueba.

**Proposición 447.** *Si un plano  $\alpha$  es perpendicular a una recta  $a$ , entonces es perpendicular a todas las rectas paralelas a  $a$ .*

**Ejercicio 448.** Demuestre la proposición 447 siguiendo los pasos indicados a continuación.

1. Abra una hoja de GeoGebra y elija la vista 3D. Oculte los ejes coordenados.
2. Sea  $\alpha$  el plano  $xy$ . Marque un punto  $A$  sobre  $\alpha$ .
3. Trace la recta  $a$  por  $A$ , perpendicular a  $\alpha$ .
4. Trace una recta  $b$  paralela a  $a$ , por un punto  $B$  que no está en  $\alpha$ .
5. Trace el plano  $c$  que contiene a  $a$  y a  $b$ .
6. Pruebe que la recta  $d$  de intersección de los planos  $\alpha$  y  $c$ , corta a la recta  $b$ , en el punto  $C$ . Es decir, la recta  $b$  es secante con el plano  $\alpha$ . Dibuje a  $d$  y  $C$ .

7. Pruebe que las rectas  $b$  y  $d$  son perpendiculares.
8. Dibuje un punto  $D$  sobre  $\alpha$  pero no sobre  $d$ .
9. Trace una recta  $e = AD$ .
10. Pruebe que  $e$  es perpendicular a  $a$ .
11. Trace una recta  $f$  paralela a  $e$ , por  $C$ .
12. Trace una recta  $g$  paralela a  $d$  por  $D$ .
13. Pruebe que existe un punto  $E$  de corte de  $g$  y  $f$ . Dibújelo.
14. Pruebe que los segmentos  $AD$  y  $CE$  son congruentes.
15. Trace una recta  $h$  paralela a  $d$  por  $B$ .
16. Pruebe que existe un punto  $F$  de corte de  $h$  y  $a$ . Dibújelo.
17. Pruebe que los segmentos  $AF$  y  $CB$  son congruentes.
18. Muestre que los puntos  $B$ ,  $C$  y  $E$  están en un mismo lado del plano determinado por  $A$ ,  $D$  y  $F$ .
19. Muestre que los puntos  $B$  y  $E$  están a un mismo lado de la recta  $FD$ .
20. Pruebe que los segmentos  $FD$  y  $BE$  son paralelos y congruentes.
21. Pruebe que los triángulos  $FAD$  y  $BCE$  son congruentes.
22. Pruebe que  $\widehat{BCE}$  es recto.
23. Concluya la prueba.

# Bibliografía

- [Alia Aponte de Saravia, 2007] Alia Aponte de Saravia, D. (2007). *Geometría Plana y Espacial*. Editorial de Universidad Nacional de Salta.
- [Efimov, 1984] Efimov, N. (1984). *Geometría superior*. Mir.
- [Ivorra, 2016] Ivorra, C. (2016). *Geometría*. Recuperado de <https://www.uv.es/ivorra/Libros/Geometria2.pdf>.
- [Margaris, 1990] Margaris, A. (1990). *First Order Mathematical Logic*. Dover books on advanced mathematics. Dover Publications.

Este texto puede ser de mucha utilidad como una guía de exposiciones para los estudiantes. Ese fue el origen y su evolución se enriqueció principalmente a través del proceso de retroalimentación con los estudiantes.

Está centrado en el autoaprendizaje, antes que en la enseñanza, por lo que las instancias presenciales son muy participativas y gratificantes.

También puede interesar a quienes gustan de la lógica, como un desafío a sus habilidades deductivas.

ISBN 978-987-633-565-2

